



Atividade 1 - Matemática do acaso

1 - Justificativa

Sabemos que os estudos de probabilidade iniciaram-se com a troca de correspondência entre Pascal e Fermat acerca da chance de ganho em jogos de azar. Sabemos também que esses estudos, originalmente aplicados apenas aos jogos, hoje fazem parte do moderno arsenal matemático utilizado para explicar diversos modelos que encontramos na mecânica quântica e nos fractais, por exemplo.

O roteiro desta atividade parte dessa tradição histórica, quando exige do aluno a escrita de frações que representam chances em sorteios. Esta justificativa torna-se importante para que fique clara a opção pelo estudo das probabilidades associado inicialmente ao estudo dos jogos. Não se trata, de forma alguma, de valorizar a compreensão dos mecanismos dos jogos de azar, com o objetivo de levar vantagens individuais durante seu exercício, mas apenas aproveitar o possível aprendizado do conteúdo matemático que se esconde por trás das regras da atividade de maneira crítica e responsável.

Por outro lado, o jogo é reconhecidamente uma das principais metodologias de trabalho com matemática, pois nele, dentre outros motivos, *desenvolve-se o autoconhecimento – e o conhecimento dos outros – a partir da articulação entre o conhecido e o imaginado*¹

2 - Descrição da atividade

Esta atividade é formada por duas partes denominadas *Sorteio na caixa* e *Roda matemática*. Cada uma delas é concebida para um momento de aula normal de 50 minutos. Dessa forma, a atividade se esgota em 3 aulas, sendo a última destinada à formalização e à discussão dos conteúdos envolvidos.

No *Sorteio na caixa*, os alunos são convidados a preencher inicialmente uma tabela de dupla entrada, com quantidades de algumas “peças” que formarão o conjunto a partir do qual, posteriormente, será efetuado um sorteio. Esses elementos têm características que se interceptam. Há “peças” verdes, amarelas ou azuis e há “peças”

¹ Parâmetros curriculares Nacionais – Ministério da educação e Cultura – Brasília 1997



triangulares e circulares distribuídas pelas 3 cores. O usuário poderá escolher uma das peças e escrever a chance que ela tem de ser sorteada dentre todos os elementos do conjunto. A cada escolha do usuário, o sistema gera o sorteio aleatório de uma peça e testa a correção da escrita da chance e, também, se o usuário foi feliz em sua escolha, isto é, se a peça que escolheu foi ou não sorteada.

Na segunda parte, a *Roda matemática*, o usuário terá a oportunidade de refletir sobre as probabilidades de ocorrência de eventos diversos, recolhidos de um universo formado por uma série de subconjuntos numéricos com características bastante variadas. Os alunos farão escolhas, calcularão a probabilidade de que suas escolhas venham a ser sorteadas, o sistema gerará aleatoriamente o sorteio e o usuário, ao final, calculará seu ganho ou perda de acordo com a escolha efetuada. Nessa etapa, além das probabilidades simples, o sistema introduzirá também os alunos no estudo das probabilidades condicionais, além de permitir, se o professor assim desejar, seu aproveitamento para a discussão da probabilidade de reunião ou de intersecção de eventos.

3 - Como conduzir a atividade?

3.1 - Sorteio na caixa.

- Duração da atividade: 50 minutos
- Organização: preferencialmente em grupos de 2 alunos

Sugerimos que nessa primeira atividade os alunos sejam convidados a “jogar” sem qualquer interferência prévia.

No final, o aluno será convidado a localizar seu rendimento em uma escala de valores. Esse rendimento leva em conta duas questões: a sorte e a correção dos cálculos, com maior valorização desta última variável. Levando em conta a digitação correta ou não da chance de sorteio pelo usuário, e também o sucesso ou o fracasso da escolha feita, o sistema atribui pontos a cada jogada, da seguinte maneira:

- Chance correta e sucesso no sorteio = +2
- Chance correta e fracasso no sorteio = +1
- Chance errada e sucesso no sorteio = 0
- Chance errada e fracasso no sorteio = - 1



ainda a probabilidade igual a $\frac{1}{2}$ de que um número ímpar saia na 5ª rodada. Dessa forma, a probabilidade de que a pessoa que escolheu um número ímpar ganhe o jogo é $\frac{1}{2}$ na 4ª rodada mais $\frac{1}{4}$ na 5ª rodada, isto é, $\frac{3}{4}$; enquanto a pessoa que escolheu par tem apenas $\frac{1}{4}$. O professor poderá, ainda, fazer variações sobre esse mesmo problema, conforme faziam Pascal e Fermat, como aumentar o número de resultados necessários para garantir a vitória, de 3 para 4 ou para 5, a fim de que os alunos percebam a importância de analisar a “árvore” e de escrever frações para representar as chances de sucesso.

Sugerimos, também, que o professor prepare uma lista de exercícios envolvendo o cálculo de probabilidades simples, da maneira como contempla a atividade, para pedir que seus alunos os resolvam em sala ou em casa, antes de propor a atividade seguinte. Dessa forma, ainda sem formalizar claramente a nomenclatura envolvida, os alunos complementarão o processo de sensibilização iniciado com a atividade no computador.

3.2 - Roda matemática

- Duração da atividade: de 50 a 100 minutos
- Organização: preferencialmente em grupos de 2 alunos

O experimento desenvolvido nesta atividade foi baseado em um jogo bastante conhecido, que é o jogo de roleta. As variações que aqui foram feitas em relação ao jogo original permitiram, em primeiro lugar, retirar o caráter de um jogo de azar, e, em segundo, introduzir eventos com características mais aproximadas daqueles que encontramos nos problemas clássicos envolvendo probabilidades. Todavia, como em última instância os alunos estarão diante de um jogo no qual farão apostas, será de extrema importância que o professor, ao final da atividade, conduza uma discussão sobre questões éticas, como falaremos mais adiante.

Como o sistema tem uma parte tutorial, não consideramos a necessidade de uma preparação prévia, especialmente se os alunos já tiverem cumprido a primeira parte do módulo, do *Sorteio na caixa*. Caberá ao professor acompanhar a atividade dos grupos de trabalho e auxiliá-los nas dúvidas que, porventura, venham a aparecer no momento da escrita das probabilidades. No entanto, vale observar que algumas vezes os alunos se confundem com a forma como é calculado o total de pontos do aluno após cada rodada, e, sobre isso, o professor precisa estar atento. Por isso, vamos



considerar um exemplo: *O aluno inicia com 10 pontos e, na primeira rodada, escolhe o evento “par”. Ao clicar sobre essa escolha na “Tabela de escolhas”, o sistema, automaticamente, tira 1 ponto de seu saldo, reduzindo a 9. Se o sorteio não apontar essa escolha feita pelo usuário, é pedido que seja digitado -1, mas o sistema não abate nenhum ponto do saldo, uma vez que isso já foi feito. No entanto, se o sorteio apontar um número par, o sistema pede que o aluno digite +2 e o saldo anterior, de 9 pontos, é, então, corrigido para 11 pontos.*

A análise desse exemplo nos mostra que, quando a probabilidade é $\frac{1}{2}$, o usuário, ao ter sua escolha sorteada pelo sistema, ganha, na verdade, 1 ponto, apesar de digitar +2. Isso porque, na realidade, esses 2 pontos positivos incluem o ponto que ele “apostou” na rodada.

De acordo com o envolvimento dos alunos na atividade, que costuma ser grande, será possível que toda uma aula de 50 minutos seja dedicada aos casos de probabilidades simples, nível 1, deixando uma outra aula de 50 minutos para os casos envolvendo probabilidades condicionais, nível 2.

O sistema pede aos alunos que comuniquem o total de seus pontos ao professor, ao final do nível 1 da atividade. O professor deverá organizar esses resultados em uma tabela, na lousa, mostrando para toda a classe que a maior parte dos alunos terá obtido total negativo, como seria mesmo de se esperar por razões estatísticas. Afinal, em cada rodada, a probabilidade de perda em quase todos os eventos é maior do que a probabilidade de ganho. O professor poderá mostrar, ainda, que a adição dos resultados finais de todos os alunos muito provavelmente será também negativo, e, com isso, iniciar com a classe uma discussão sobre jogos de azar, mostrando matematicamente as vantagens de quem organiza o jogo sobre quem dele participa como apostador. Em resumo, o organizador nunca perde. Esse fato deverá ser aproveitado para discutir com a classe as questões de caráter ético envolvido nos jogos de azar.

Se o professor sentir-se seguro, poderá jogar de fato o “jogo da roleta” com toda a classe, agora de maneira real, não virtual. Para tanto, precisará de uma única roleta, possível de conseguir em uma loja de brinquedos qualquer a um custo muito baixo. Nesse caso, o professor fará o papel de “banca”, girando a roleta e comunicando o resultado aos alunos que, antes disso, deverão ter escrito as apostas e calculado as probabilidades. A diferença, nesse caso, será o fato de que na roleta habitual há



números de 0 a 36, portanto 37 números, de maneira que o denominador das frações que representam as probabilidades simples será sempre igual a 37. Sugerimos, para facilitar, que se exclua a possibilidade de sorteio no 0 e que os resultados possíveis variem de 1 a 36, permitindo dessa forma que as frações sejam de denominador 36.

Finalizando a atividade, será importante que o professor formalize os conceitos de eventos simples, espaço amostral e de probabilidade simples, introduzindo, inclusive, a fórmula de cálculo. Também a probabilidade condicional poderá ser formalizada, embora não seja aconselhável a escrita de uma fórmula de cálculo, uma vez que os alunos poderão prescindir de seu uso em cálculos desse tipo. Uma lista de problemas envolvendo probabilidades simples e condicionais poderá ser preparada para que os alunos resolvam nas aulas seguintes, antes da continuidade do tema nas demais atividades.

Caso o professor deseje introduzir o cálculo de probabilidades de ocorrência de reunião ou intersecção de eventos independentes ou não, ele poderá fazê-lo a partir do uso de uma roleta comum e não mais com a utilização do computador. Nesse caso, o professor aproveitaria a motivação dos alunos, conseguida na interação com o sistema, para propor a eles que apostem em dois eventos simultaneamente e avaliem quais são suas chances de sucesso.

Partindo da discussão será possível formalizar conjuntamente que, em casos de eventos independentes, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ e a probabilidade de reunião de dois eventos pode ser sempre calculada por $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.