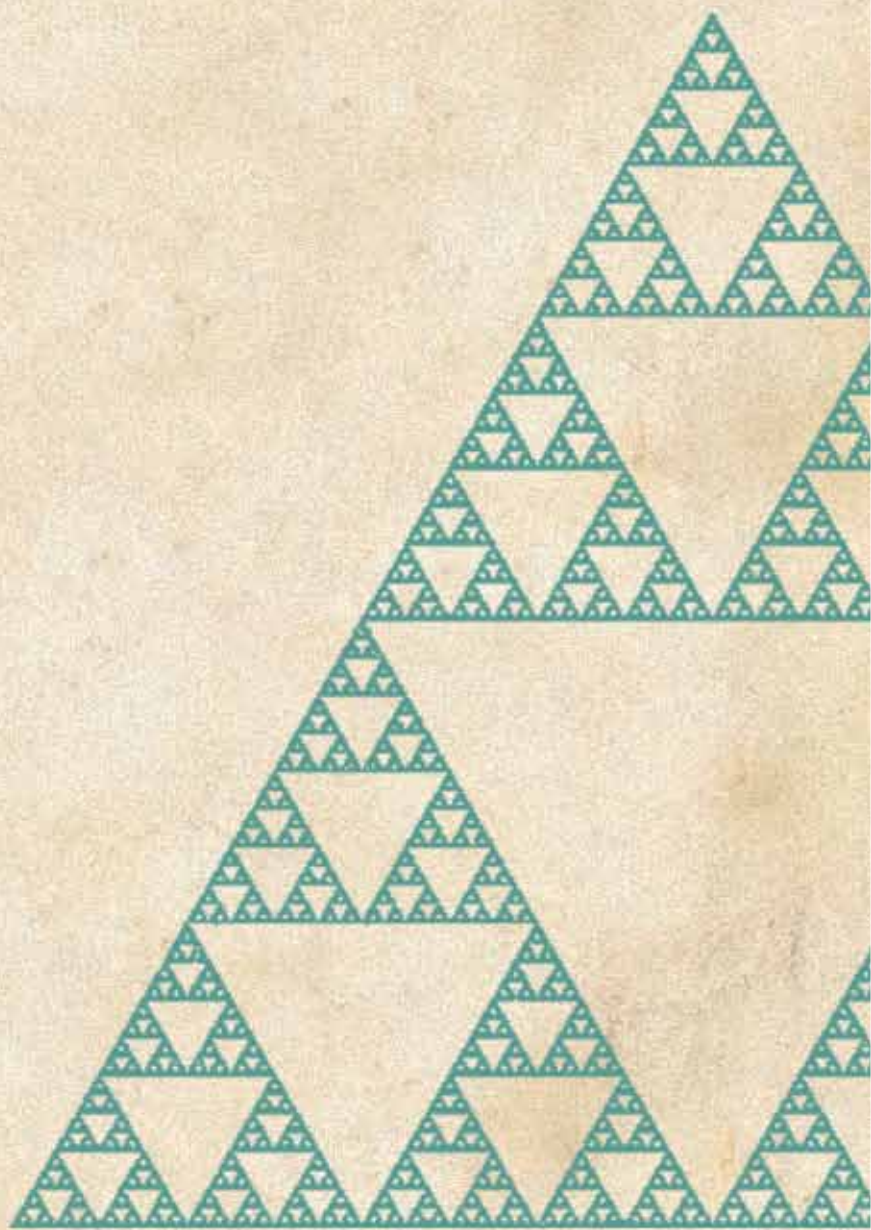


Guia do Professor

Conteúdos Digitais



Áudio 01

Fractais

Série Matemática ao Pé do Ouvido

Coordenação Geral

Elizabete dos Santos

Autores

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Souza
Karina Alessandra Pessoa da Silva
Lourdes Maria Werle de Almeida
Luciana Gastaldi Sardinha Souza
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino e
Rodolfo Eduardo Vertuan

Revisão Textual

Elizabeth Sanfelice

Coordenação de Produção

Eziquiel Menta

Projeto Gráfico

Juliana Gomes de Souza Dias

Diagramação e Capa

Aline Sentone
Juliana Gomes de Souza Dias

Realização
Multimeios
Secretaria de Estado
da Educação do Paraná

DISTRIBUIÇÃO GRATUITA
IMPRESSO NO BRASIL



ÁUDIO “MATEMÁTICA AO PÉ DO OUVIDO”

Episódio 1: FRACTAIS

Introdução

O áudio Fractal, do programa “Matemática ao Pé do Ouvido”, apresenta situações que podem desencadear discussões sobre Geometria Fractal (geometria não-euclidiana), progressões geométricas, função exponencial e as relações destes temas com a natureza e com a música.

A partir de sua audição, espera-se despertar no aluno a curiosidade para realizar pesquisas sobre a relação existente entre a Matemática e a Música. A relevância desta relação justifica-se pela aprovação, no dia 28 de Maio de 2008, do Projeto de Lei 2732/2008, que determina a obrigatoriedade do ensino musical na Educação Básica. Desta forma, pretende-se apontar novas práticas pedagógicas para auxiliar a exploração da música nos processos de ensino e de aprendizagem.

Objetivos

- Reconhecer autosemelhança na natureza;
- Compreender o que é um fractal;
- Estabelecer relações entre a Matemática e a Arte, nomeadamente entre a geometria não euclidiana (geometria fractal) e a música;
- Identificar as características de um fractal;
- Conceituar uma Progressão Geométrica (PG);
- Relacionar PG com fractal;
- Identificar PG na música.
- Representar graficamente uma PG.

Sugestão de Atividades

Atividade 1

Após a audição da entrevista, o professor pode propor a identificação da auto-similaridade na natureza, a partir de imagens ou de objetos. Existem várias plantas que possuem a característica de auto-similaridade dos fractais. O áudio cita duas delas: a samambaia Renda Portuguesa e a couve-flor.



Figura 1 - Samambaia
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm

A samambaia da Figura 1 é composta de um talo central com várias ramificações. Cada uma destas ramificações também é um talo central com várias ramificações e assim por diante. Cada parte da samambaia representa o todo, característica de auto-semelhança dos fractais.



Figura 2 – Couve-flor

Contudo, os objetos da natureza não são verdadeiramente fractais, pois eles não atendem a todas as propriedades dos fractais, como a de ser infinitamente complexos.

As principais propriedades que caracterizam os fractais são a **auto-semelhança** a **complexidade infinita** e a sua dimensão.

A **auto-semelhança** é a simetria observada em diversas escalas. Caracteriza-se por cada pequena porção do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor.

A **complexidade infinita** está relacionada com o fato de o processo gerador dos fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações.

A **dimensão** dos fractais, ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira. Com efeito, ela pode ser uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem a ver com o seu grau de irregularidade.

Outras plantas que possuem essa característica são:

Russélia (planta pendente) Bambu Mossò
AspargolImperial (arbusto)
Nandina (uma árvore de mais ou menos 2,5m)
Podocarpos (lembra o pinheiro)
Léa Rubra (árvore)
Léa Verde (árvore)
Shinus Mollis (tipo de chorão)

Seria interessante o professor levar os alunos a uma loja especializada em plantas para visualizarem estas espécies.

Em um segundo momento, no laboratório de informática, reunidos em grupos conforme os computadores disponíveis, os alunos podem pesquisar os fractais mais elaborados e gerados por computador, quais sejam:

Conjunto de Mandelbrot

(<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico10.php>, este site tem um vídeo muito bom que deve ser visto),

Conjunto de Julia

(<http://www.google.com.br/search?hl=ptBR&q=conjunto+de+j%C3%BAlia&btnG=Pesquisar&meta=>),

Triângulo de Sierpinski

(<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico4.php>) ,

Curva de Koch

(http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm), entre outros.

Atividade 2

Após a visita ao laboratório, o professor pode colocar a imagem de um quarteto de cordas.



Figura 3 – Quarteto de cordas
<http://zerohora.clicrbs.com.br/rbs/image/3978376.jpg>

Da esquerda para a direita temos os seguintes instrumentos: violino, outro violino, violoncelo e viola.

O professor pode levar, ou pedir para que alguns alunos levem, um violão para a sala de aula, com o objetivo de representar as diversas divisões da corda do violoncelo com uma das cordas do violão. Ele pode pedir a um dos alunos que meça o comprimento da corda do violão (a medida deve ser feita de um cavalete ao outro).



Figura 4 - Violão

Digamos que esta corda inicial tenha comprimento L
 O professor pode pedir para um aluno pinçar a corda, colocando-a para vibrar em toda a sua extensão.



Figura 5 - Corda de comprimento L

Depois, o professor divide esta corda ao meio e toca uma de suas metades. Este som soará uma oitava acima e terá comprimento $\frac{1}{2} L$.



Figura 6 - Corda de comprimento $L/2$

Os sons que escutamos no áudio referem-se às notas dó1 e dó2



Figura 7 - Escala Musical de oito sons de dó1 a dó2

No violão, se a corda pinçada foi a mais grave e se este estiver afinado nos parâmetros normais de afinação (mi, lá, ré, sol si, mi), a nota mais grave é o mi1 e os sons ouvidos serão os das notas mi 1 e mi2.



Figura 8 - Escala Musical de oito sons de mi1 a mi2

Ao fazermos a divisão ao meio, executamos o procedimento uma vez. Dizemos que esta é a **iteração 1**.

A segunda oitava terá comprimento $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} L = (\frac{1}{2})^2 L$. Esta é a **iteração 2**. O procedimento foi feito 2 vezes.

A terceira oitava terá comprimento $\frac{1}{2} (\frac{1}{2})^2 L = (\frac{1}{2})^3 L$. Esta é a **iteração 3**.

E assim por diante, as oitavas sucessivas são geradas pelas iterações da função $\frac{1}{2} L$, obtendo-se a seguinte **sequência numérica**:

$$\{L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{4}L, \frac{1}{8}L, \dots\}$$

As oitavas, portanto, são geradas por uma **progressão geométrica** de razão $\frac{1}{2}$. Desse modo, ao iniciarmos esta sequência com a corda dó do violoncelo, que tinha comprimento aproximado L de 68cm, a sequência será: {68, 34, 17, 8,5, ...}.

O professor pode trabalhar todos os conteúdos de PG (razão, termo genérico, etc.) com esta sequência e com a sequência obtida por meio da corda do violão. Num segundo momento, pode trabalhar com a sequência genérica $\{L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{4}L, \frac{1}{8}L, \dots\}$ em função de L.

Atividade 3

Nessa atividade propomos o trabalho com a representação gráfica: Comprimento da corda X Iteração:

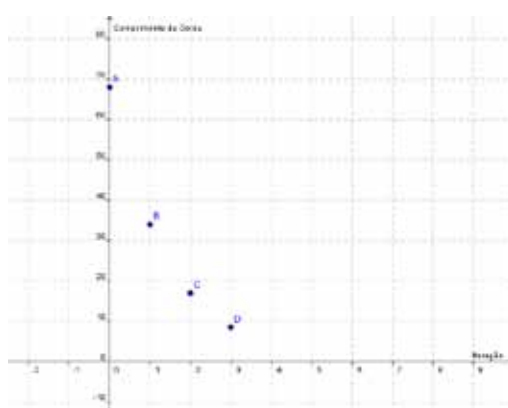


Figura 9 - Gráfico do Comprimento da corda X Iteração

O gráfico pode ser feito no programa Geogebra. (o download pode ser obtido gratuitamente a partir do site <http://www.geogebra.at/>)

As sucessivas divisões ao meio geram os seguintes comprimentos de corda:

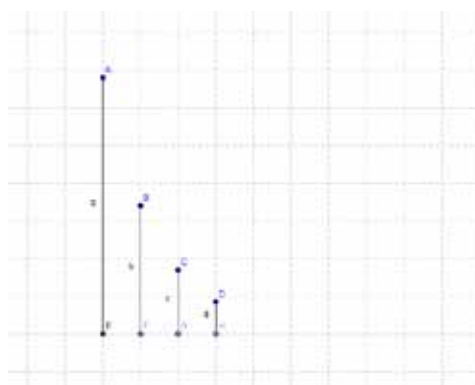


Figura 10 – Segmentos que representam comprimentos da corda

Os segmentos a, b, c, e d possuem comprimento 68, 34, 17 e 8,5 respectivamente. Cada um é obtido a partir da divisão do anterior por dois, uma construção fractal que gera intervalos de oitava em música.

Além desta sequência ser uma Progressão Geométrica, é também o conjunto imagem da função exponencial $f(x) = (1/2)^x$. $L, x \in \mathbb{N}$. A variável x é um expoente, por isso função exponencial. Uma progressão geométrica é uma função exponencial cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Atividade 4

O professor pode propor a seguinte questão:

O número $\frac{1}{64}L$ vai ser um termo desta sequência.

Quantas vezes teríamos que dividir a corda para obter esta fração?

Resposta: O número de vezes que a corda deveria ser dividida seria dado pelo cálculo de um logaritmo: $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{64})$, cujo resultado é 6.

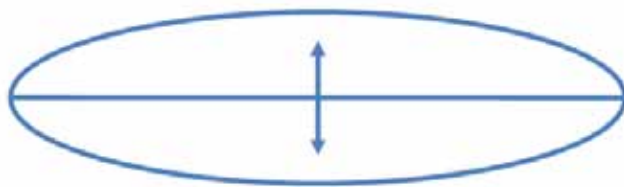
Isto porque a função inversa da exponencial é a logarítmica. Desse modo, deveríamos dividir a corda pela metade 6 vezes.

Atividade 5

Além do comprimento, o professor pode trabalhar com a frequência das notas. O dó1, que é a nota com a qual iniciamos o fractal no áudio, tem a frequência aproximada de 65 Hertz. Isto significa que esta corda vai fazer 65 oscilações completas em um segundo.

O que é uma oscilação?

Resposta: Para uma corda gerar um som ela precisa ser pinçada. Ao ser pinçada ela se distende até um ponto limite, volta passando pela posição de repouso, vai até o lado oposto na posição limite e volta à posição de repouso. Esta é uma oscilação completa.



A frequência é determinada pelo número de oscilações completas da corda em um segundo.

A corda que gera a nota dó, ao ser dividida pela metade, gera um som que possui o dobro da frequência, ou seja, duas vezes 65. Esta metade, por sua vez, ao ser dividida ao meio gera um outro som cuja frequência será $2 \cdot 65$, e assim por diante.

Então podem ser gerados fractais de oitavas levando em consideração o comprimento da corda ou a frequência. No caso do violoncelo, a primeira é representada pela função exponencial $f(x) = (1/2)^x$

onde x é a iteração, sendo $f(x)$ o comprimento da corda e x a iteração. A segunda pela função exponencial $g(x) = 2 \cdot 65^x$, sendo $g(x)$ a frequência e x a iteração.

O professor pode explorar os gráficos destas duas funções, relacionando-os com suas equações e verificando qual é crescente e qual é decrescente, o que isso implica nas equações, etc.

O professor encerra a atividade com uma síntese do que foi estudado e sugere estudos que ficaram em aberto.

Avaliação

A avaliação pode ser realizada durante todo o desenvolvimento das atividades, por meio de questionamentos como os sugeridos anteriormente. O professor pode aproveitar as respostas dos alunos para fazer as intervenções que julgar necessárias.

Sugestões de sítios

Os sítios a seguir podem oferecer interessantes motivações para pesquisas:

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/>: O mundo mágico dos Fractais;

<http://www.insite.com.br/fractarte/>: Janelas para o Infinito -Exposição de Fractais.

Indicações de leituras

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2002.

BENNETT, G. **Chaos, self-similarity, musical phrase and form**. Disponível em: <<http://www.computermusic.ch/files/articles/Chaos,Self-Similarity/Chaos.html>>. Acesso em: 2 Abr 2008.

FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática / **Revista do Professor de Matemática**, 3º quadrimestre, 2005.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **Fractais e Caos** – A Matemática de Hoje. São Paulo: Editora Parma Ltda., 1990.

VARANDAS, José. **Página elaborada no âmbito da disciplina de Interdisciplinaridade ciências-matemáticas do curso de Ensino de Matemática**. Faculdade de Ciências – Universidade de Lisboa: Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/>. Acesso em: 05.jun.2007.

BENNETT, G. Chaos, self-similarity, musical phrase and form. Disponível em: <<http://www.computermusic.ch/files/articles/Chaos,Self-Similarity/Chaos.html>>. Acesso em: 2 Abr 2008.

Condigital



**Ministério da
Ciência e Tecnologia**

**Ministério
da Educação**

Realização:

