Plano de Aula

MATEMÁTICA

Função quadrática

Função quadrática.

12 p.; il. (Série Plano de Aula; Matemática)
ISBN:

1. Ensino Fundamental – Matemática
2. Função quadrática 3. Números e operações
I. Título II. Série

CDU: 373.3:51

Plano de Aula

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nível de Ensino	Ensino Fundamental/ Anos Iniciais
Ano / Semestre	9º ano
Componente Curricular	Matemática
Tema	Números e Operações/ Álgebra e Funções/ Espaço e Forma
Duração da Aula	2 aulas (50 min cada)
Modalidade de Ensino	Educação Presencial

OBJETIVOS

Ao final da aula, o aluno será capaz de:

- D9 – EF2- MAT- Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas Cartesianas.
- D31 – EF2- MAT - Resolver problema que envolva equação do 2.º grau.
- D1.8 – F2 – TEC - Representar graficamente (por gestos, palavras, objetos, desenhos, gráficos etc.) os objetos, situações, sequências, fenômenos, acontecimentos etc.
- D2.9 – F2 – TEC- Interpretar, explicar o sentido que têm para nós acontecimentos, resultados de experiências, dados, gráficos, tabelas, figuras, desenhos, mapas, textos, descrições, poemas etc. e apreender este sentido para utilizá-lo na solução de problemas.
- D3.9 – F2 – TEC - Fazer generalizações (indutivas) a partir de leis ou de relações descobertas ou estabelecidas em situações diferentes, isto é, estender de alguns para todos os casos semelhantes.

PRÉ-REQUISITOS DOS ALUNOS

- Saber utilizar os programas do *laptop* educacional: *Kword, KSpread. e Firefox* .

RECURSOS/MATERIAIS DE APOIO

- *Laptop* educacional com acesso à Internet;
- cartolinas coloridas;
- caneta hidrográfica;
- câmara fotográfica digital;
- conta de *e-mail* para o professor;
- lousa;
- pincel;
- régua.

GLOSSÁRIO

Diretriz: *sf* **1** Linha fixa, ao longo ou em volta da qual se imagina correr outra linha ou uma superfície, para produzir uma figura plana ou um sólido. *D. de uma seção cônica:* linha cuja distância a qualquer ponto de uma seção cônica está numa razão fixa para a distância do mesmo ponto a um foco.

Equidistante: *adj m+f* (*eqüi*²*+distante*). Diz-se de coisas que estão à igual distância de outra.

(*)Fonte: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/
Acessado em 29/01/2012.

QUESTÕES PROBLEMATIZADORAS

Qual a relação entre as figuras abaixo?

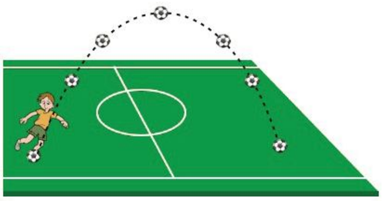


Figura 1

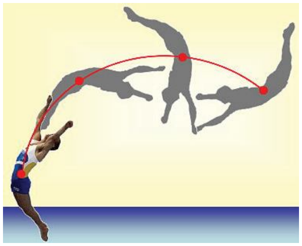


Figura 2

Figura 3

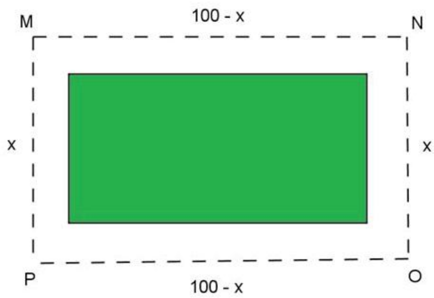
Como você explicaria esses fenômenos?

Figura1: http://www.10emtudo.com.br/aula/3_6_2056/ensino/lancamento_obliquo/
Figura2 e 3: http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2007-09-02_2007-09-08.html .

LEIS, PRINCÍPIOS, TEORIAS, TEOREMAS, AXIOMAS, FUNDAMENTOS, REGRAS...

Função Quadrática

Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta com tela de alambrado. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível.



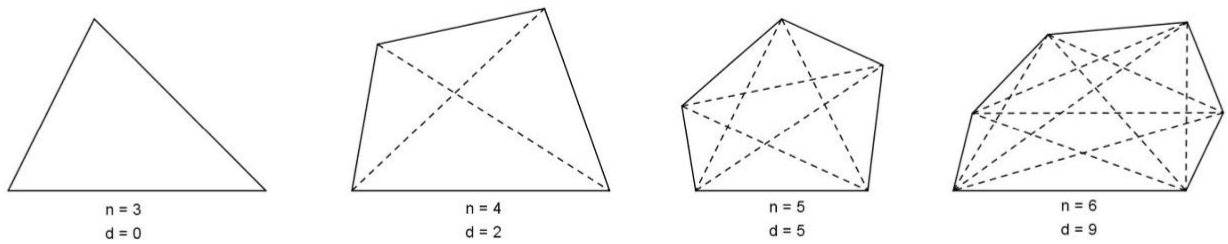
Podemos ilustrar o problema com o retângulo MNOP, com dimensões x por *100-x* , pois o perímetro é de 200 metros. Observe que a área do terreno a cercar é dada em função da medida, ou seja:

$$f(x) = (100 - x)x = 100x - x^2.$$

Dizemos que a função $f(x) = 100x - x^2$ é o modelo matemático para a situação real apresentada.

Outra situação em que aparece a função quadrática.
O número de diagonais em um polígono convexo de ***n*** lados é dado por uma função quadrática. Observe:

LEIS, PRINCÍPIOS, TEORIAS, TEOREMAS, AXIOMAS, FUNDAMENTOS, REGRAS...



Um polígono de n lados tem n vértices. De cada vértice partem $(n-3)$ diagonais e, para não considerar duas vezes a mesma diagonal, dividimos $n(n-3)$ por 2. Assim, temos d em função de n dado por:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n.$$

II. Definição de função quadrática

Uma função $f: R \to R$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in R$.

III. Zeros (ou raízes) da função quadrática

Os zeros da função quadrática são os valores de x que anulam a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Ou seja, os zeros de $f(x)$ são os valores de $x \in R$ para os quais $ax^2 + bx + c = 0$.

Note que $ax^2 + bx + c = 0$, é uma equação do segundo grau, portanto os valores x que satisfazem essa condição são as mesmas raízes da equação do segundo grau. Portanto,

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

É a fórmula que fornece as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.
Podemos escrever:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x" = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sabemos que não existe raiz quadrada de números reais negativos. Assim, a quantidade de raízes da função quadrática depende do valor assumido pelo discriminante Δ.

Observações:

Se $\Delta < 0$, a função quadrática **não tem raízes**, pois não se pode calcular a raiz quadrada do Δ negativo.

Se $\Delta = 0$, temos $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$. Assim,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = x = \frac{-b \pm 0}{2a} = x = \frac{-b}{2a}.$$

Neste caso, $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$. Logo a função tem **duas raízes reais e iguais**.

Se $\Delta > 0$, existe $\sqrt{\Delta}$ e, assim, obtemos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \neq x" = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

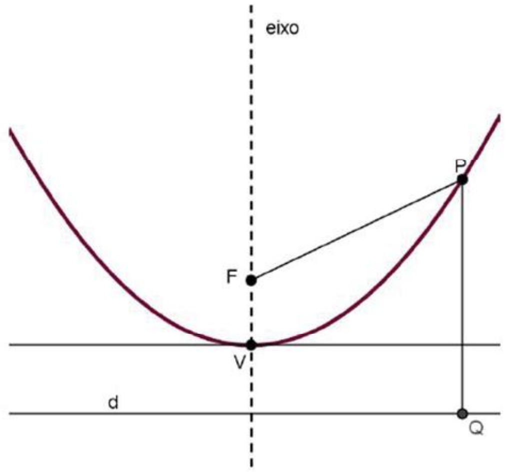
LEIS, PRINCÍPIOS, TEORIAS, TEOREMAS, AXIOMAS, FUNDAMENTOS, REGRAS...

Nesse caso, a equação tem **duas raízes reais e distintas.**

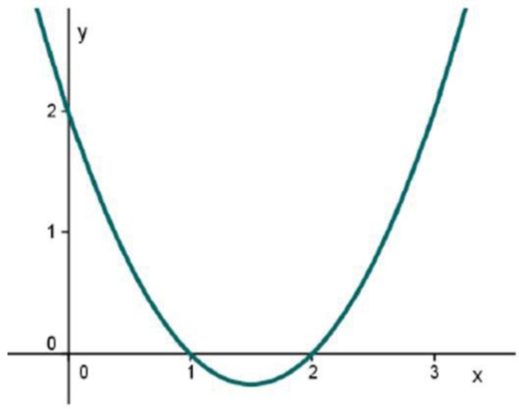
IV. Gráfico da função quadrática

Considere um ponto **F** e uma reta **d** que não o contém. Chamamos **parábola** de foco **F** e diretriz **d** ao conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de **F** e de **d**.

A reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se **eixo da parábola**. O ponto **V** é o ponto médio do segmento cujos extremos são o foco e a intersecção do eixo com a diretriz.



A figura abaixo representa a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$.



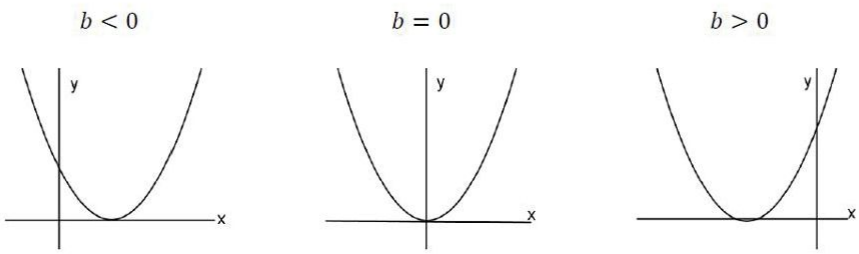
Observe que a parábola intersecta o **eixo** x nos pontos 1 e 2 que, como vimos, são as raízes da função; e intersecta o **eixo** y no ponto 2, que representa o valor de c na função quadrática.

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, analisemos como os coeficientes a, b e c são relacionados ao gráfico da função:

- O coeficiente a está relacionado à concavidade da parábola. Ou seja, se $a > 0$, a concavidade da parábola está votada para **cima**. E, se $a < 0$, a concavidade da parábola estará voltada para **baixo** (o resumo a seguir, ilustra bem estes fatos).

LEIS, PRINCÍPIOS, TEORIAS, TEOREMAS, AXIOMAS, FUNDAMENTOS, REGRAS...

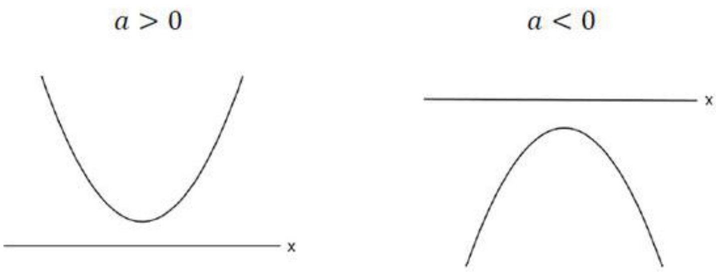
- O coeficiente b indica se a parábola intersecta o $\boldsymbol{eixo\ y}$ no ramo crescente ou decrescente da parábola. Isto é, se $b < 0$, a parábola intersecta o $\boldsymbol{eixo\ y}$ no ramo **decrescente**; se $b > 0$, a parábola intersecta o $\boldsymbol{eixo\ y}$ no ramo **crescente**; e, se $b = 0$, a parábola intersecta o $\boldsymbol{eixo\ y}$ no vértice da parábola.



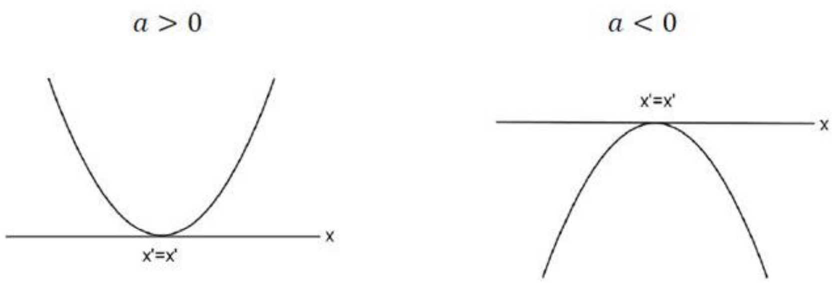
O coeficiente c é o ponto de interseção da parábola com o $\boldsymbol{eixo\ y}$.

A seguir, um resumo da relação entre o coeficiente a e o discriminante Δ, associados à função quadrática, com o gráfico desta função.

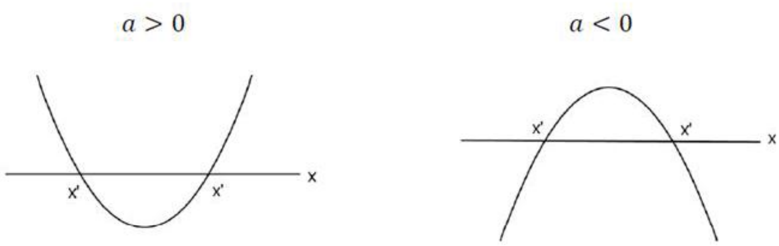
- Se $\boldsymbol{\Delta} < 0$ (a função não tem raízes reais)



- Se $\boldsymbol{\Delta = 0}$ (a função tem uma raiz real)



- Se $\boldsymbol{\Delta} > 0$ (a função tem duas raízes reais e distintas)



LEIS, PRINCÍPIOS, TEORIAS, TEOREMAS, AXIOMAS, FUNDAMENTOS, REGRAS...

V. Imagem da função quadrática

O vértice da parábola dada pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é dado por

$$V(x_V, y_V) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como seu valor de **máximo** ou **mínimo.**

O conjunto imagem da função é dado por:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ \exists\, x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x) = y\}.$$

Fonte: http://www.mat.ufpb.br/manasses/Nivelamento/Fun%E7%E3o%20Quadr%E1tica.pdf, acessado em 01.02.2012.

PARA REFLETIR COM OS ALUNOS

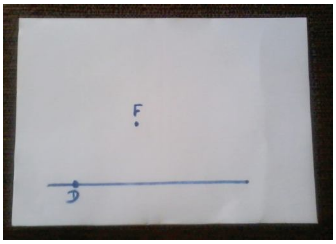
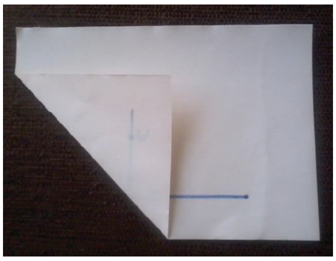
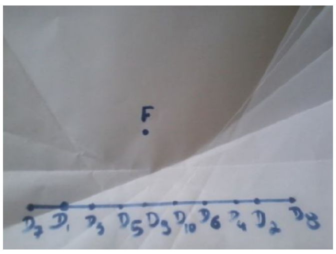
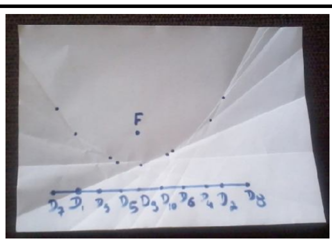
O NÚMERO DE OURO

Confira o Episódio do programa: Arte & Matemática, produzido pela TV Escola. Nesse vídeo discute-se sobre a relação entre arte e matemática através do conceito do número de ouro:

http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001034.mp4

ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELO PROFESSOR

1ª Aula:
O professor iniciará a aula solicitando que os alunos registrem com a **câmera digital** a construção de uma parábola através de dobraduras:

	Solicite que os alunos organizem o material necessário: - Caneta; - Régua; - Cartolina Colorida;
	Com auxílio da régua marque uma linha que será a reta **diretriz** de sua parábola. E fora dessa linha, marque um ponto F (foco da parábola). Ainda nessa etapa, solicite que os alunos marquem um ponto D sobre a reta.
	Agora, solicite que seja feita uma dobra no papel de forma que o ponto D coincida com o ponto F.
	Repita o passo anterior o maior número de vezes possíveis. No exemplo ao lado, 10 pontos foram marcados. Quanto maior o número de pontos marcados mais visível ficará sua parábola.
	Para realçar o gráfico da parábola marque os pontos de encontro das marcações formadas pelas dobraduras. O professor poderá discutir algumas das propriedades da parábola através da simetria existente entre os pontos marcados na **parábola** e os pontos marcados sobre a **reta**, destacando os pontos **equidistantes** em relação ao ponto F(foco).

Em seguida o professor conceituará função quadrática, relacionando a abordagem algébrica com a construção geométrica feita na atividade. Com as fotos retiradas durante a construção da parábola, os alunos deverão construir um relatório, usando para isso o *Kword.* O professor solicitará que os relatórios sejam enviados para sua conta de *e-mail*.

ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELO PROFESSOR

2ª Aula:

O professor solicitará que os alunos construam uma tabela no *software KSpread* do laptop educacional. Para construir essa tabela siga o seguinte roteiro:

- A tabela deverá ter duas colunas, a primeira para os valores da variável independente (x) e a segunda para a variável dependente (y).
- Na segunda linha da segunda coluna $(B4)$ será atribuída uma fórmula (polinômio quadrático), como no exemplo(**Figura 1**):

$= (A3)\hat{}2 - 6 * (A3) + 16$.

Essa fórmula representará a função: $y = f(x) = x^2 - 6x + 16$. Os símbolos “^” e “*” representam respectivamente: a operação de potenciação e multiplicação, funções disponíveis no *KSpread*.

- Clicando no canto inferior direito da célula $B4$, e arrastando até a célula $B11$, a fórmula será expandida para as demais células e os cálculos serão feitos pelo programa;
- Selecione toda a tabela, e em seguida clique sobre o ícone para inserir um gráfico. O tipo de gráfico que deverá ser escolhido é do tipo **linha.**

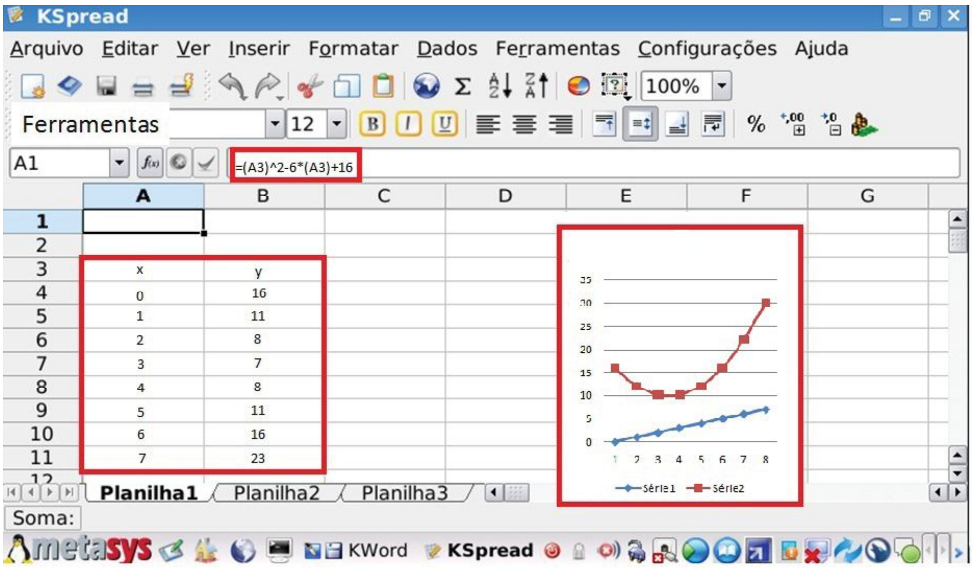


Figura 1

Duas linhas serão formadas: a linha curva mostrará o gráfico da função quadrática. O professor discutirá com os alunos os resultados do gráfico e solicitará que outras tabelas sejam confeccionadas, onde os alunos deverão modificar os coeficientes das funções. Juntamente com os gráficos das demais funções os alunos colocaram suas conclusões sobre a influência de cada um dos coeficientes na aparência do gráfico das funções quadráticas estudadas. No final da aula os alunos deverão enviar a planilha eletrônica com suas conclusões e gráficos também para a conta de *e-mail* do professor.

Figura1: Imagem modificada pela autora do plano do programa *KSpread*.

TAREFA DOS ALUNOS

1. Registrar a construção de uma parábola através de dobraduras;
2. Redigir e enviar um relatório com as fotos da atividade de dobraduras para o *e-mail* do professor.
3. Construir uma tabela e seu respectivo gráfico no editor de planilhas eletrônicas, *KSpread.*
4. Construir outras tabelas variando os coeficientes das funções, redigindo uma análise de suas impressões sobre a aparência de seus respectivos gráficos.
5. Enviar para o professor a planilha eletrônica com demais tabelas, gráficos e conclusões.

PARA SABER MAIS

O Fogão Solar de Funil

Conheça um pouco mais sobre os fogões solares de funil, em formatos parabólicos e suas contribuições para o meio-ambiente. Disponível em: http://solarcooking.org/portugues/funnel-pt.htm

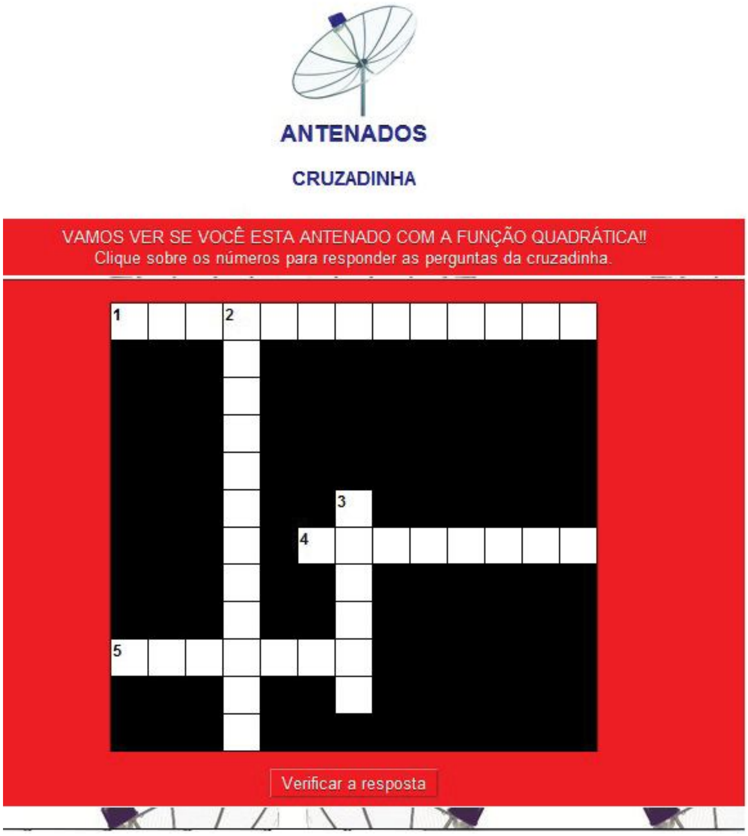
Figura: http://solarcooking.org/portugues/funnel-pt.htm

AVALIAÇÃO

Critérios	Desempenho avançado	Desempenho médio	Desempenho iniciante
Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas Cartesianas.			
Resolver problema que envolva equação do 2.º grau.			
Representar graficamente (por gestos, palavras, objetos, desenhos, gráficos etc.) os objetos, situações, sequências, fenômenos, acontecimentos etc.			
Interpretar, explicar o sentido que têm para nós acontecimentos, resultados de experiências, dados, gráficos, tabelas, figuras, desenhos, mapas, textos, descrições, poemas etc. e apreender este sentido para utilizá-lo na solução de problemas.			
Fez generalizações (indutivas) a partir de leis ou de relações descobertas ou estabelecidas em situações diferentes, isto é, estender de alguns para todos os casos semelhantes.			

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Divirta-se com o jogo **"Antenados".**



EXERCÍCIOS PARA AVALIAÇÕES/// Provinha Brasil • Prova Brasil • PISA e ENEM

1. Um biólogo estudando uma espécie de grilo chegou à seguinte fórmula para determinar a altura máxima (h, em metros) de seu salto:
$h(t) = -2t^2 + 8t$, onde t representa o tempo em **segundos** do salto.

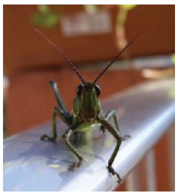


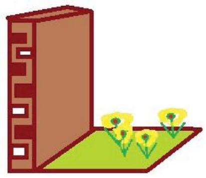
Figura 1

Selecione a alternativa que indica em que segundo o grilo atinge a altura máxima:

a) $t=1s$
b) $t=2s$
c) $t=\frac{1}{2}s$
d) $t=3s$

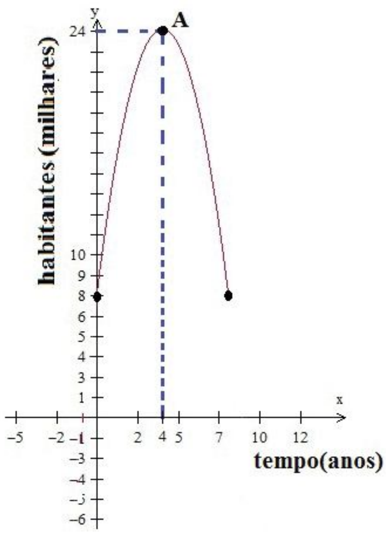
EXERCÍCIOS PARA AVALIAÇÕES/// Provinha Brasil • Prova Brasil • PISA e ENEM

2. Flora quer delimitar seu jardim, mas precisa saber quantos metros de arame são necessário para cercar apenas 3 dos lados de um terreno quadrângular de $4m^2$ de área?



a) 8 m
b) 7 m
c) 6 m
d)4 m

3. O gráfico abaixo representa uma projeção do crescimento populacional de uma pequena cidade para os próximos anos tendo como referência a população atual de 8 mil habitantes:



Marque a alternativa correta sobre a leitura do gráfico acima:

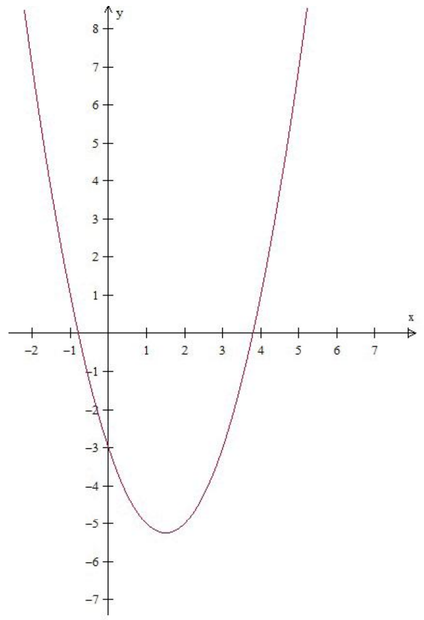
a) A população atingirá o número mínimo de 4 mil habitantes, no período de 24 anos.
b) O ponto A indica o momento em que a população atingirá seu número máximo de 24 mil habitantes, nos próximos 4 anos.
c) O número máximo de pessoas dessa cidade será de 8 mil habitantes, não importa o tempo que passar.
d) Em quatro anos a população atingirá o número de 8 mil habitantes.

4. A soma entre dois números é 6. Qual o valor de um desses números para que o produto deles seja o máximo possível?

a) 2
b) 4
c) 3
d) 6

EXERCÍCIOS PARA AVALIAÇÕES/// Provinha Brasil • Prova Brasil • PISA e ENEM

5. Observe o gráfico abaixo e marque a alternativa correta:



a) O gráfico acima representa uma função do 1º grau.
b) Podemos afirmar que o discriminante da função acima é nulo.
c) O coeficiente a da função quadrática representada pelo gráfico acima é maior que zero.
d) O coeficiente *c* da função quadrática representada pelo gráfico acima é igual a 4.

Figura 1: http://oesquema.com.br/olhometro/category/ha-mais-entre-o-ceu/page/4/

ANOTAÇÕES