CRIANDO, VENDO E ENTENDENDO SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Ana Maria Kaleff
Luciana Almeida Sá
Maria Inês Martins de Toledo

Departamento de Geometria
Universidade Federal Fluminense – RJ

1. Introdução

Segundo os princípios orientadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) os conhecimentos básicos de geometria são fundamentais para as pessoas interagirem adequadamente com seu meio ambiente, assim como para se iniciarem num estudo mais formal dessa disciplina. Esses conhecimentos básicos, os quais compreendem conceitos, suas propriedades e relações simples entre eles, deveriam, em geral, ser adquiridos por meio de experiências realizadas ao longo de todo sistema educacional. Desta forma, se os alunos devem adquirir conhecimento sobre os fundamentos geométricos elementares, é importante que os professores não só tenham um bom domínio sobre seus aspectos matemáticos, como também saibam identificar e dominar metodologias de ensino que lhes permitam a familiaridade com diversificadas maneiras de levar à criança a uma aprendizagem geométrica significativa.

Nos meios educacionais, tem sido tomado como consenso geral que as formas geométricas podem servir como modelos elementares para muitos tipos de fenômenos do cotidiano, mas que elas, no entanto, têm sido pouco exploradas nas salas de aulas. Partindo-se desse princípio e utilizando-se materiais de baixo custo, foram desenvolvidas algumas atividades motivadoras para o estabelecimento de situações que levam o aluno a identificar, diferenciar, reconhecer e comparar formas geométricas. Além disso, esses materiais didáticos buscam levar o estudante a visualizar as formas geométricas e a analisar suas características de regularidade, conforme as recomendações dos princípios norteadores dos PCN's.

Como os desafios despertam o interesse e uma atenção especial dos alunos, buscou-se, com o uso de materiais concretos e de sua manipulação, tornar o ensino da geometria espacial mais atrativo, possibilitando ao aluno perceber a geração de sólidos de revolução e de relacioná-los com objetos do nosso cotidiano. Por outro lado, apesar do amplo universo da informática existente em nossos dias,

o que permitiu o aparecimento de muitos programas computadorizados destinados ao ensino da geometria, as atividades envolvendo sólidos tridimensionais apresentam-se na tela do computador em forma de desenhos em duas dimensões e, além disso, a imagem dos sólidos é apenas virtual. No entanto, as atividades que utilizam materiais concretos possibilitam ao aluno a oportunidade de uma observação real dos sólidos, cujas imagens visuais e reais podem ser comparadas às computadorizadas.

Considerando que os PCN's e o Modelo de van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico (Kaleff et ali., 1994) estão na fundamentação teórica de grande parte da pesquisa e das ações desenvolvidas nos projetos voltados para o ensino e aprendizagem da Geometria na UFF, este trabalho tem como pressuposto adequar o ensino de sólidos de revolução aos níveis de van Hiele.

Segundo van Hiele a visualização, a análise e a organização informal das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito. Desta forma, partindo de conceitos da geometria plana e desenvolvendo várias atividades, pretende-se levar o aluno a identificar por meio de sua observação e visualização, e, a seguir, através de argumentações lógicas informais e posteriormente formais, estabelecer o conceito de sólido de revolução.

Compreender como se chega às técnicas de cálculo de volumes de sólidos de revolução e resolver problemas pela aplicação correta dessas técnicas, desenvolvendo várias habilidades geométricas espaciais, é outro objetivo deste trabalho.

No desenvolvimento destas atividades, buscou-se, também, uma maneira prazerosa de se introduzir os conteúdos geométricos, explorando-se entre outros aspectos, alguns problemas motivadores com grau crescente de dificuldade. As atividades iniciais são destinadas a alunos das primeiras séries do ensino fundamental, que já possuam algum conhecimento de Geometria Plana e de sólidos geométricos, tais como: reconhecimento de algumas figuras planas e espaciais, perímetros, áreas e volumes. Todavia, essas atividades também visam motivar jovens e adultos do ensino médio, bem como, proporcionar aos docentes e licenciandos em Matemática a oportunidade de revisitar conteúdos conhecidos e refletir sobre o ensino das fórmulas para o cálculo das áreas de superfícies e dos volumes de sólidos de revolução.

Os aparelhos e os instrumentos utilizados nas atividades apresentam-se em forma de instrumental para ser manipulado pelos alunos, objetivando-se dar ênfase ao desenvolvimento da habilidade de visualização geométrica. Esta habilidade é considerada como ferramenta fundamental para uma leitura mais acurada do mundo à nossa volta.

As atividades são apresentadas de forma dinâmica incentivando o diálogo e uma troca de argumentações entre os alunos, buscando conduzi-los à construção de um determinado conceito. Cabe salientar que cada atividade deve ser adequada ao entendimento dos participantes, podendo ser agrupada em um número maior ou menor de procedimentos. Por outro lado, pode-se também, adaptá-las para um museu interativo, no qual essas atividades devem ser apresentadas de maneira mais simples e objetiva, e, portanto, mais sintética.

A criação de instrumentos didáticos para um museu interativo visando a divulgação da Educação Matemática e a aplicação desses materiais em oficinas para professores tem-se apresentado como uma forma eficaz de se popularizar a Matemática e seu ensino. A Universidade Federal Fluminense, por meio do Laboratório de Ensino de Geometria e do Espaço-UFF de Ciências, ambos em Niterói-RJ, tem investido na direção de vincular ações pedagógicas a museus interativos.

2. Material Utilizado na realização das atividades

A seguir, apresentamos a descrição dos materiais utilizados nas atividades, bem como dos aparelhos criados para a geração e exploração dos conteúdos no âmbito dos sólidos de revolução.

2.1. *Caixa Geradora de Sólidos de Revolução*

A Caixa Geradora de Sólidos de Revolução é um aparelho constituído por uma caixa de madeira, de aproximadamente 40cm x 25cm x 12cm, em cujo interior encontra-se um sistema de roldanas com correia, passível de ser acionado por uma manivela colocada no seu exterior. A caixa desse gerador possui, em uma de suas faces, cinco pinos destinados a serem suporte para um conjunto de bandeirinhas cujos mastros são hastes de metal. Na Figura 1.a., encontra-se um esquema desse gerador.

2.2. *Gerador Manual de Sólido de Revolução*

Este gerador é um aparelho de uso alternativo em substituição à Caixa Geradora de Sólidos de Revolução.

O Gerador Manual de Sólido de Revolução se constitui por um quadro retangular de ripas de madeira de aproximadamente 30cm x 15 cm, contendo, no seu interior, duas roldanas confeccionadas com tampas de latas e uma correia de

borracha para acionamento. Este aparelho tem apenas uma entrada para bandeirinha, e, neste caso, esta deve possuir mastro de madeira. Na Figura 1.b., encontra-se um esquema desse gerador.

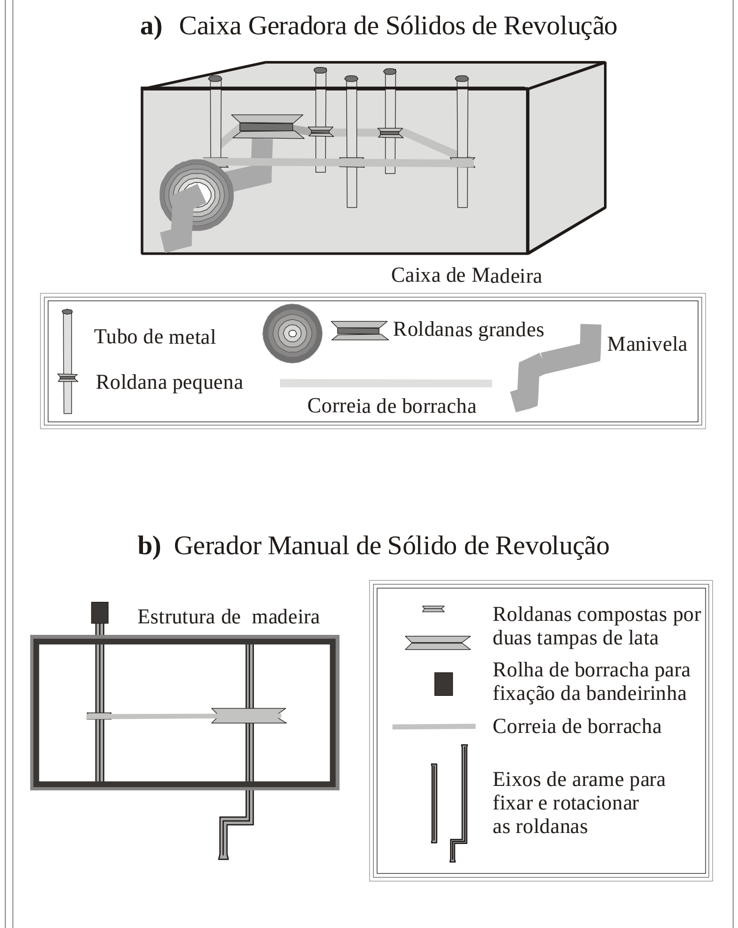

FIGURA 1

2.3. *Conjuntos de Bandeirinhas*

Cada conjunto de Bandeirinhas é composto por figuras geométricas construídas em acetato não transparente, ou papel-cartão, (Conjuntos nº 1, 2, 3 e 4) ou arame colorido (Conjunto nº 5) presas em um mastro, de aproximadamente 15cm de comprimento, constituído por uma vareta de ferro ou de madeira, destinadas à Caixa Geradora ou ao Gerador Manual, respectivamente.

Conjuntos de Bandeirinhas

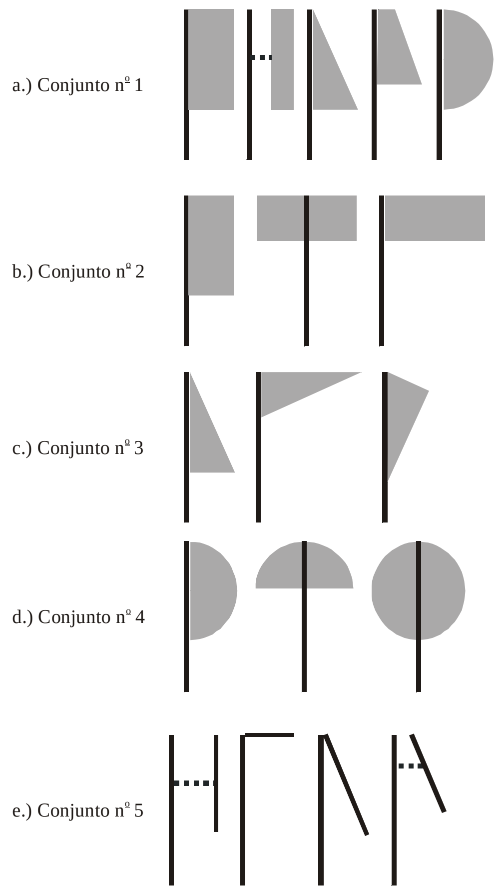

FIGURA 2

- <u>Conjunto nº 1 de Bandeirinhas</u>
  Composto por bandeirinhas com a forma de retângulo, triângulo, trapézio e semicírculo, presas ao mastro, conforme esquema da Figura 2.a..
- <u>Conjunto nº 2 de Bandeirinhas</u>
  Formado por três bandeirinhas retangulares de mesmas dimensões, presas ao mastro, conforme as posições indicadas no esquema da Figura 2.b..
- <u>Conjunto nº 3 de Bandeirinhas</u>
  Formado por três bandeirinhas com a forma de triângulos retângulos de mesmas dimensões, presas ao mastro, conforme as posições indicadas, no esquema da Figura 2.c..
- <u>Conjunto nº 4 de Bandeirinhas</u>
  Formado por duas bandeirinhas com a forma de um semicírculo e de um círculo de mesmo raio presas ao mastro, conforme indicado no esquema da Figura 2.d..
- <u>Conjunto nº 5 de Bandeirinhas</u>
  Estruturas confeccionadas em arame colorido, que representam algumas superfícies dos sólidos de revolução apresentados no item anterior, presas ao mastro, conforme indicado no esquema da Figura 2.e..

Cumpre salientar que, no caso de não ser possível a confecção dos aparelhos geradores de sólido de revolução pode-se realizar um procedimento alternativo utilizando-se bandeirinhas cujos mastros sejam construídos com um palito de madeira. Neste caso, o mastro, quando friccionado com as mãos, faz girar a bandeirinha, o que substituirá os aparelhos na geração do sólido de revolução. No entanto, em nossa prática, foi observado que os aparelhos geradores são mais indicados para as atividades destinadas aos museus interativos.

2.4. *Materiais complementares*

- <u>Objetos do cotidiano</u>: que lembrem sólidos geométricos, tais como: rolo de papel higiênico, latas, caixas, etc.
- <u>Sólidos geométricos:</u> com forma de cilindro, cilindro vazado, cone, tronco de cone e esfera, confeccionados em isopor, ou papel cartão.
- <u>Desenho de representações de sólidos geométricos:</u> desenhos em perspectiva e relativos aos sólidos apresentados no item anterior.
- <u>Figuras planas que compõem a superfície do cilindro, do cone e do tronco de cone</u>: confeccionada em cartolina correspondente aos sólidos apresentados no item anterior.

- Rampa: construída com papelão ou madeira, com uma inclinação de cerca de 45º.
- Estrutura confeccionada com palito de madeira ou vareta de ferro e arame colorido: sendo que dois segmentos são da mesma cor e perpendiculares à vareta, unidos a um segmento de outra cor paralelo a esse eixo, formando assim uma linha fechada, com seus extremos pertencentes à vareta, representando a delimitação de uma superfície retangular, conforme representado na Figura 3.

FIGURA 3

- Dois cubos e dois cilindros: construídos em acetato, cujas medidas das alturas e das áreas das bases sejam as mesmas, sendo que ambos os sólidos devem ter uma de suas faces não colada às demais.
- Um cilindro e três cones: confeccionados em acetato, que tenham mesma medida de base e de altura, sendo que o cilindro possua uma das bases removíveis e os cones não possuam as bases.
- Areia e folha de papel ofício.

3. Descrição das atividades

3.1. *Sólidos de Revolução obtidos a partir de figuras planas no Espaço*

As atividades a seguir, visam levar o aluno a desenvolver a capacidade de: associar uma figura gerada no espaço com o sólido de revolução correspondente; reconhecer o sólido quando representado por um desenho no plano e vice-versa; perceber que figuras geométricas planas com a mesma forma e tamanho potencializam a geração de diferentes sólidos de revolução, e, ao final destas atividades, classificar os sólidos de revolução.

3.1.1. Atividade I

Nesta atividade serão utilizados alguns objetos do cotidiano, um dos geradores, o Conjunto nº 1 de bandeirinhas e a rampa.

Procedimento para o aluno:

a) Encaixe cada uma das cinco bandeirinhas, na entrada do gerador e gire a manivela. Você consegue ver figuras formadas pelo giro das bandeirinhas?

Saiba, que essas figuras são chamadas de **figuras espaciais ou sólidos espaciais.**

b) Dentre os objetos do cotidiano que se encontram sobre a mesa, separe aqueles que se parecem com as figuras espaciais que você viu ao girar a manivela do gerador. Chame esse conjunto de A e o conjunto formado pelos objetos restantes chame de B.

c) Coloque sobre a rampa cada um dos objetos do conjunto A. É possível fazê-los rolar sobre essa rampa?

d) Repita o que foi feito no item anterior, usando agora os elementos do conjunto B, isto é, aqueles que você não conseguiu associar a nenhuma bandeirinha.

e) Discuta com seus colegas se existe alguma característica comum quanto à superfície externa dos objetos dos conjuntos A e B.

f) Observando os objetos do conjunto B, você consegue desenhar alguma bandeirinha que gere cada um deles?

Você deve ter observado que os elementos do conjunto A rolam sobre a rampa, e que para cada elemento desse conjunto existe uma bandeirinha que o gerou. Já para os elementos do conjunto B, não foi possível fazê-los rolar, nem desenhar e nem relacionar a eles nenhuma bandeirinha.

Saiba que esses sólidos, formados pela rotação de figuras planas, são chamados de **sólidos de revolução** e que são figuras ou sólidos espaciais, que contém todos os pontos do seu interior, isto é, são figuras "cheias".

3.1.2. Atividade II

Nesta atividade serão utilizados as bandeirinhas do Conjunto nº 1, um dos geradores, o conjunto de sólidos geométricos e a folha contendo o desenho de representações de sólidos geométricos.

Procedimento para o aluno:

a) Considerando que as bandeirinhas quando rotacionadas geram os sólidos de revolução, ponha uma bandeirinha de cada vez no gerador e tente localizar dentre os sólidos à sua frente, aquele que corresponde ao gerado pela bandeirinha, quando você gira a manivela do gerador.

b) Você seria capaz de colocar sobre cada desenho da folha recebida, o sólido correspondente ao gerado pela bandeirinha?

c) Coloque as bandeirinhas no gerador. Posicione-o de modo que os mastros fiquem na posição horizontal em relação à mesa. Gire a manivela do gerador. Você consegue associar para cada uma das bandeirinhas um sólido de revolução dentre os sólidos à sua frente?

d) Existe alguma relação entre a forma da figura plana da bandeirinha e o tipo de sólido correspondente?
e) Discuta com seus colegas o que vocês observam quanto à posição do sólido gerado quando altera a posição do mastro das bandeirinhas de vertical para horizontal em relação à mesa.

Você deve ter percebido que para cada sólido de revolução existe uma bandeirinha correspondente. Essa bandeirinha é uma figura plana presa ao mastro, e que para cada forma de bandeirinha corresponde um sólido de revolução, independente da sua posição em relação ao plano da mesa.

3.1.3. Atividade III

Agora, serão utilizadas as bandeirinhas do Conjunto nº 2.

Procedimento para o aluno:

a) Você seria capaz de dizer se existe alguma característica comum aos retângulos que formam as bandeirinhas? E quanto à posição em que as figuras geométricas planas foram fixadas ao mastro?
b) Desenhe as bandeirinhas utilizadas nessa atividade e trace, em cada uma delas, um segmento de reta representando o mastro.
c) Discuta com seus colegas se as três bandeirinhas geram sólidos de revolução iguais, e que tenham as mesmas medidas.

Você deve ter observado que os três retângulos são figuras geométricas congruentes, mas de acordo com a sua fixação no mastro, obteremos três bandeirinhas distintas. Cada segmento de reta desenhado em cada um dos retângulos representa o mastro, que, como vimos anteriormente, é o eixo de rotação, e as figuras geradas por cada bandeirinha retangular chamamos de **cilindros**, os quais, no caso, dessas bandeirinhas, não têm as mesmas formas.

3.1.4. Atividade IV

Utilizaremos agora as bandeirinhas do Conjunto nº 3.

Procedimento para o aluno:

a) Existe alguma característica comum aos triângulos que formam as bandeirinhas? E quanto à posição em que as figuras geométricas foram fixadas ao mastro?
b) Desenhe as bandeirinhas utilizadas nessa atividade e marque no desenho, com um "tracinho", o lado no qual elas foram fixadas aos mastros.

c) Coloque essas três bandeirinhas para rotacionar no gerador. Discuta com seus colegas se existe alguma característica comum com relação aos sólidos gerados. Você conseguiria dividir em conjuntos esses sólidos gerados, considerando aqueles que apresentam apenas uma forma pontiaguda?

Você deve ter observado que os triângulos retângulos desse conjunto de bandeirinhas são figuras geométricas congruentes, e que, no entanto, de acordo com a sua fixação no mastro, obtêm-se três bandeirinhas distintas. Os “tracinhos” colocados ao lado de cada triângulo representam o lado fixo em torno do qual os outros lados giram. Chamamos esse lado de **eixo de rotação.**

Observe que as figuras geradas por duas das bandeirinhas apresentam apenas uma forma pontiaguda, essas figuras geradas são chamadas de **cones**.

3.1.5. Atividade V

Utilizaremos agora as bandeirinhas do Conjunto nº 4.

Procedimento para o aluno:

a) Existe alguma característica comum às duas figuras com a forma de semicírculo que formam as bandeirinhas?
b) Coloque no gerador, para girar, as três bandeirinhas sendo duas com a forma de semicírculo e uma com forma de círculo. Os sólidos gerados são os mesmos?
c) O que você pode afirmar com relação aos sólidos de revolução gerados pelas duas bandeirinhas congruentes, ou seja, pelos dois semicírculos?
d) Discuta com seus colegas se existe alguma semelhança quanto aos sólidos de revolução gerados pela bandeirinha com a forma de um semicírculo, cujo eixo de rotação encontra-se na extremidade reta da mesma, e a bandeirinha com a forma de um círculo.
e) Você deve ter observado que as duas figuras com forma de semicírculo são figuras geométricas congruentes, mas de acordo com a sua fixação ao mastro, isto é, ao eixo de rotação do sólido de revolução, obtemos dois sólidos de revolução distintos, que são chamados respectivamente de **esfera** e **semi-esfera**.

Por outro lado, você deve ter observado que as bandeirinhas com formas distintas, um círculo e um semicírculo, de acordo com a sua fixação no mastro, isto é, no eixo de rotação, geram um mesmo tipo de sólido de revolução, que também é uma esfera.

Você deve ter observado que, a forma dos sólidos de revolução está, portanto, diretamente relacionada com o tamanho e a forma da figura geométrica plana utilizada na sua geração, e também com a posição em que esta figura está fixada ao mastro, ou seja, no eixo de rotação.

Assim vimos que o:

- **cilindro** é formado pela rotação do retângulo;
- **cone** é formado pela rotação de um triângulo;
- **esfera** é formada pela rotação de um círculo ou um semicírculo.

Você percebeu que no Conjunto nº 1 existe uma bandeirinha em forma de trapézio que ao ser rotacionada gerou um cone sem a ponta? Este sólido é chamado de **tronco de cone** ou de **cone truncado**.

3.2. *Planificação de Sólidos de Revolução*

As atividades seguintes têm por objetivo inicial levar o aluno, com cerca de 11 anos de idade, a perceber que as superfícies dos sólidos de revolução, geradas por figuras planas de seu conhecimento, podem ser planificadas. A seguir, por meio dessa planificação, busca-se potencializar o aluno a reconhecer que, cada uma das superfícies que compõe o sólido de revolução corresponde à outra figura plana também conhecida. Com esta dupla atividade o aluno poderá realizar o cálculo da área total ou parcial da superfície de um sólido de revolução.

É muito importante que ao final dessas atividades o aluno consiga diferenciar que um segmento de reta, quando rotacionado, gera uma superfície no espaço; que uma superfície plana, quando rotacionada, gera um sólido de revolução, e ainda que, o sólido de revolução é formado por uma superfície plana (casca) e pelos seus pontos interiores (o seu “recheio”).

3.2.1. Atividade VI

Para realizar essa atividade utilizaremos o gerador de sólidos de revolução como anteriormente; figuras planas que compõe a superfície do cilindro, cone e tronco de cone e o Conjunto nº 5 de bandeirinhas. A essas bandeirinhas chamaremos de **varetas**.

Procedimento para o aluno:

a) Coloque as varetas no gerador e gire a manivela. Considerando o arame colorido de cada vareta como um segmento de reta, você saberia dizer se existe algum objeto que você conhece que lembre as figuras geradas no espaço por cada um desses segmentos?
b) Observe o arame colorido que representa o segmento de reta perpendicular ao mastro, quando rotacionado no gerador, Você é capaz de associar uma das figuras planas que estão sobre a mesa com a figura gerada? E com o segmento de reta paralelo ao mastro? Faça o mesmo com as duas varetas restantes.

c) Usando fita adesiva e, se for possível, cole dois dos lados das figuras planas existentes sobre a mesa, de forma que cada figura colada corresponda àquela gerada por uma vareta quando rotacionada.

Você deve ter percebido que, em cada vareta, o arame colorido está representando um segmento de reta, o qual quando rotacionado gera uma figura no espaço.

3.2.2. Atividade VII

Nesta atividade utilizaremos o gerador e a estrutura confeccionada com vareta de ferro e arame colorido da Figura 3.

Procedimento para o aluno:

a) Considerando que cada arame colorido da estrutura representa um segmento de reta, qual a posição de cada segmento de reta em relação ao mastro?
b) Observando a estrutura em seu poder, discuta com seus colegas o que cada segmento de reta representa na bandeirinha geradora do cilindro.
c) Considerando cada segmento de reta isoladamente, quantas figuras planas são necessárias para representar a figura espacial gerada quando se rotaciona a estrutura?
d) Desenhe isoladamente a figura plana que correspondente a cada segmento de reta da estrutura quando rotacionada.
e) Discuta com seus colegas se existe alguma relação entre a quantidade de figuras planas obtidas no item anterior e o número de segmentos de retas que compõe a estrutura.

Você deve ter observado que a estrutura construída com arames coloridos utilizados na atividade é composta pela união de três segmentos de reta, formando uma única linha. Embora seja uma única estrutura, que compõe a borda de uma bandeirinha retangular, a qual gera o cilindro, necessitamos de uma figura plana para representar cada segmento de reta que a compõe. Temos, portanto, três figuras planas para uma única estrutura: dois círculos que representam as superfícies das bases do cilindro e um retângulo que representa a superfície lateral do cilindro.

3.2.3. Atividade VIII

Utilizaremos a bandeirinha que gera o cilindro do conjunto nº 1 de bandeirinhas, a planificação do cilindro e o sólido de revolução correspondente.

Procedimento para o aluno:

a) Quais figuras planas correspondem à casca do cilindro em seu poder?
b) O que você pode afirmar ao comparar o lado menor da bandeirinha, com a medida do raio do círculo correspondente à superfície da base do cilindro?
c) O que você pode afirmar ao comparar o lado maior da bandeirinha com os lados do retângulo, isto é, com os lados da figura plana correspondente à superfície lateral do cilindro?
d) Você é capaz de dizer qual dos lados da bandeirinha é usado para o cálculo da área da figura plana com a forma de retângulo, que corresponde à lateral do cilindro?
e) Agora, você é capaz de dizer qual dos lados da bandeirinha é usado para o cálculo da área da superfície da base do cilindro?
f) Baseado no que você observou anteriormente, usando a bandeirinha da Figura 4, você é capaz de indicar como poderemos calcular a área da superfície total do cilindro gerado por essa bandeirinha? Preencha o quadro a seguir:

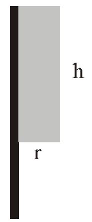

FIGURA 4

Área da superfície lateral	
Área da superfície da base	
Área da superfície total do cilindro	

Você deve ter observado que existe uma relação entre as dimensões da figura geradora e as das figuras planas que compõe o sólido de revolução. Daí, conhecendo-se as figuras planas que compõe a superfície de um sólido de revolução, e usando conhecimentos matemáticos adquiridos quanto à maneira de calcular a área da superfície de uma figura plana, podemos calcular a área da superfície lateral, da base e total de um sólido de revolução.

3.3. *Cilindro*

Dando seqüência às atividades apresentadas anteriormente pretende-se fazer com que o aluno seja capaz de calcular o volume ocupado por um cilindro. Objetiva-se, também, permitir que ele conheça o Princípio de Cavalieri.

É necessário que o aluno saiba calcular o volume ocupado por um sólido, e conhecimentos sobre o cálculo volumétrico de alguns prismas, no caso particular, do cubo.

3.3.1. Atividade IX

Utilizaremos os dois cubos e os dois cilindros (conforme especificados na lista de materiais complementares), folha de papel e areia.

Procedimento para o aluno:

a) O que você pode afirmar em relação às alturas dos cubos e dos cilindros que estão sobre a mesa?
b) Considerando o tamanho de cada face, observe os cubos em seu poder. O que você pode afirmar com relação à face em contato direto com a mesa? E quanto à oposta? E quanto às faces planas do cilindro?
c) Encha totalmente cada cubo com areia e a despeje dentro de cada cilindro. Discuta com seus colegas sobre o volume ocupado pela areia nos dois tipos de sólidos,
d) Sabendo que para calcular o volume de um cubo necessitamos conhecer a área da base e sua altura. Como você calcularia o volume de um cilindro, no qual cabe a mesma quantidade de areia, lembrando que os sólidos possuem a mesma altura e têm a mesma área de base?
e) Juntamente com seus colegas, coloque um cubo ao lado de um dos cilindros, ponha uma folha de papel, sobre os dois sólidos simultaneamente, para representar um plano. Coloque o outro cubo e o outro cilindro sobre o papel, de maneira que os objetos parecidos fiquem sobrepostos, como se fosse um único objeto separado apenas pela folha de papel, ou seja, pelo plano.

Você deve ter obtido dois objetos com a aparência de um paralelepípedo e de um cilindro.

f) Discuta com seus colegas quanto à quantidade de areia necessária para encher os dois objetos cortados pelo plano.
g) Existe alguma relação entre o volume ocupado pelos sólidos que estão abaixo do plano? E entre o volume ocupado pelos dois sólidos que estão acima desse plano?

Saiba que foi Bonaventura Cavalieri (1598-1647) discípulo de Galileu Galilei, que fez a descoberta relacionada com as observações que você fez até agora, e hoje isto é chamado de Princípio de Cavalieri.

Baseado no princípio de Cavalieri sabe-se que sólidos apoiados em um mesmo plano, independentemente da sua forma, mas que possuem a mesma área de base e mesma altura, terão o mesmo volume quando a área das seções planas, formadas pelo corte de qualquer plano paralelo ao plano de apoio, for à mesma.

Assim, você também deve ter observado que podemos facilmente calcular o volume de um cilindro, conhecendo a área da sua base e a sua altura. Saiba que, em Matemática, indica-se o volume de um cilindro, pelo produto dos números que correspondem à área da sua base e à sua altura.

$$\boxed{V_{cilindro} = \text{Área da Base x Altura}}$$

3.4. *Cone*

A finalidade principal dessa atividade é fazer com que o aluno consiga chegar a fórmula utilizada para o cálculo do volume ocupado por um cone, utilizando materiais concretos e conhecimentos anteriores sobre o cálculo de volume de outro sólido de revolução: o cilindro.

3.4.1. Atividade X

Utilizaremos o cilindro, os três cones (conforme especificados na lista de materiais complementares) e areia.

Procedimento para o aluno:

a) Existe alguma relação entre as dimensões dos sólidos em seu poder?
b) Coloque areia em um dos cones até enchê-lo totalmente, despeje o conteúdo da areia no outro cone, repetindo a ação com o terceiro cone. Existe alguma relação entre o volume ocupado pela areia nos cones?
c) A quantidade de areia correspondente a de quantos cones você conseguiria colocar dentro do cilindro? Existe alguma relação entre a quantidade de areia que cabe em um cone e em um cilindro?
d) Como já vimos, o volume do cilindro é calculado multiplicando a área da base pela sua altura. Discuta com seus colegas como poderíamos calcular o volume ocupado por um desses cones.

Você deve ter observado que o volume de um cilindro corresponde a três vezes o volume de um cone, de mesma base e mesma altura do cilindro, logo podemos dizer que o volume de um cone corresponde a 1/3 do volume do cilindro. Assim, se A_b é a área da base do cone e h a sua altura então,

$$\boxed{V_{cone} = 1/3\ A_b \cdot h \quad \text{ou} \quad V_{cone} = 1/3\ \pi\, r^2\, h}$$

4. Concluindo...

Este trabalho permite ao professor tornar mais dinâmica a aprendizagem do Ensino da Geometria, facilitando a passagem de considerações geométricas da realidade física àquelas de uma Geometria mais abstrata.

Apesar de um certo trabalho manual que demanda do professor a construção dos aparelhos e dos conjuntos de bandeirinhas aqui propostos, percebemos que, com dedicação, esforço e emprenho é possível se levar o aluno, tanto a uma percepção maior dos conhecimentos geométricos, quanto a reforçar os conceitos já adquiridos e a prosseguir na sua caminhada. É, no entanto, um

caminhar lento, mas, seguramente realístico e educacionalmente consistente em suas realizações.

5. Bibliografia

- Kaleff, A. M. *Vendo e entendendo poliedros*. Niterói: EdUFF, 1998.
- ---------------; Rei, D. M., Garcia S. S. *Quebra-cabeças geométricos e formas planas.* Niterói: EdUFF, 2ª ed., 1997.
- ---------------; Henriques, A; Rei, D.M.; Figueiredo, L.G. *Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele*, Bolema, v.10, p. 21-30, 1994.
- Lindquist, M.; Shulte, A. P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Tradução de Higino Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
- Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática. Brasília: MEC, 1997.
- Machado, A. S. *Matemática: Temas e Metas*, v. 4. São Paulo: Atual, 1988.
- Dolce, O.; Pompeo, J.N. *Fundamentos de Matemática elementar*, v. 10. São Paulo: Atual, 1993.