Revista Brasileira de Informática na Educação, Volume 17, Número 3, 2009.

Trigonometria Dinâmica: unidade de aprendizagem online para estudo de Trigonometria

Larissa de Sousa Moreira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro
Dr. Siqueira, 273 – Parque Dom Bosco
28030-130 – Campos dos Goytacazes – RJ
email:lalisousa@gmail.com

Silvia Cristina Freitas Batista
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro
Dr. Siqueira, 273 – Parque Dom Bosco
28030-130 – Campos dos Goytacazes – RJ
email: silviac@iff.edu.br

Gilmara Teixeira Barcelos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro
Dr. Siqueira, 273 – Parque Dom Bosco
28030-130 – Campos dos Goytacazes – RJ
email: gilmarab@iff.edu.br

Liliana Maria Passerino
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Departamento de Estudos Especializados.
Av. Paulo Gama, 110 - prédio 12105 - Centro
90040-060 - Porto Alegre – RS
email: liliana@cinted.ufrgs.br

Resumo *As tecnologias digitais abrem importantes possibilidades para a aprendizagem de Matemática, a partir de simulações, visualizações, modelagens, experimentações, entre outras ações. Nesse sentido, foi desenvolvida a unidade de aprendizagem online "Trigonometria Dinâmica", direcionada ao estudo de Trigonometria, no Ensino Médio. Esta unidade foi totalmente elaborada por professores de Matemática e contém, entre outros recursos, 19 applets e uma apostila de atividades investigativas relacionadas aos mesmos. A unidade foi submetida a um processo de validação composto de duas partes: uma validação preliminar, realizada com professores e licenciandos em Matemática, e uma validação com alunos do Ensino Médio. O presente artigo descreve o referido processo de validação e analisa os resultados obtidos no mesmo, fundamentando-se na teoria sócio-histórica. A partir da análise da validação preliminar foi possível aprimorar a unidade de aprendizagem proposta. Destaca-se, ainda, que os participantes da referida validação demonstraram muito interesse pelas potencialidades dos applets, tendo em vista o uso pedagógico dos mesmos para o estudo de tópicos de Trigonometria. Os alunos do Ensino Médio, participantes da validação, mostraram-se atentos e motivados, tentando explorar, ao máximo, os recursos dos applets e, assim, compreender os conceitos abordados. Os applets permitiram visualizações e simulações que apoiaram a construção de conhecimentos.*

Palavras-Chave: *Trigonometria. Applets. Aprendizagem Matemática. Unidade de Aprendizagem.*

Abstract *Digital technologies offer important opportunities for learning mathematics, using simulations, visualizations, modeling, experimentation, and other actions. With this in mind, the online learning unit "Dynamic Trigonometry" was developed for the study of Trigonometry in Secondary School. This unit has been fully developed by mathematics teachers and contains, among other features, 19 applets and a pack of investigative activities related to the applets. The unit was submitted to a validation process consisting of two parts: a preliminary validation was carried out by undergraduates and teachers in Mathematics, and a validation carried out by students of Secondary School. This article describes the validation process and analyzes the results, based on the socio-historical theory. From the analysis of the preliminary validation it was possible to improve the learning unit proposal. It stands out, moreover, that the participants of this validation showed great interest in the potential of the applets, in view of the pedagogical use of the same for the study of topics of Trigonometry. High school students, participants of the validation, were attentive and motivated, trying to explore, as much as possible, the resources of the applets and thus understand the concepts discussed. The applets enabled views and simulations that supported the construction of knowledge.*

***Keywords**: Trigonometry. Applets. Learning Mathematics. Learning Unit.*

1 Introdução

A Matemática, muitas vezes, assume uma função social de diferenciação e de exclusão [1]. Sendo pouco acessível, esta desempenha um papel decisivo na vida das pessoas, rotulado-as e posicionando-as como aptas ou inaptas à participação nos processos de decisão da sociedade [1]. Aliado a isso, o baixo desempenho dos alunos brasileiros na avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Programme for International Student Assessment - PISA)[1] [2] sinaliza que buscar formas que favoreçam a compreensão dos conceitos matemáticos é de fundamental importância.

São muitas as críticas contra a forma como a escola aborda os conteúdos matemáticos. Para Vergnaud [3], o problema na aprendizagem da Matemática é que a escola valoriza demais os símbolos e pouco a realidade. Os alunos não vêem utilidade no que estudam [3]. Para Lima [4], o problema está no aspecto encadeado e acumulativo da Matemática. Por exemplo, um aluno não será capaz de estudar Trigonometria se não conhecer os fundamentos da Álgebra, nem entenderá essa última se não souber as operações aritméticas [4].

Diversos estudos têm sido desenvolvidos, desde as mais variadas abordagens epistemológicas, visando analisar a aprendizagem de Matemática nas escolas [5, 6, 7]. Novas formas de abordar temas matemáticos têm sido buscadas [7, 8, 9, 10, 11]. De fato, o processo de ensino e aprendizagem de Matemática não pode ir na contramão das necessidades atuais e permanecer estagnado, imutável, pelo contrário, deve ser mais acessível, de forma a se tornar menos excludente.

São inúmeros os recursos que podem ser utilizados para favorecer a compreensão de conceitos matemáticos. Dentre estes, destacam-se as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), que podem, como defendido por Ponte, Oliveira e Varandas [12], colaborar para a criação de situações de aprendizagem estimulantes em Matemática e diversificar as possibilidades de aprendizagem.

O presente artigo é resultado das atividades realizadas em um projeto de pesquisa[2]. No âmbito deste são desenvolvidos e disponibilizados, na Internet, recursos didáticos que possibilitam o estudo de temas matemáticos. O objetivo de tais ações é incentivar a utilização adequada das TICs em práticas pedagógicas, tendo em vista a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, no Ensino Médio.

Dentre os recursos desenvolvidos no âmbito do referido projeto, tem-se a unidade de aprendizagem *online* "Trigonometria Dinâmica" (http://www.es.cefetcampos.br/softmat/projeto_TIC/trigonometria_dinamica), destinada ao estudo de Trigonometria, no Ensino Médio. Esta contém, entre outros recursos, 19 *applets* para o estudo de Trigonometria e uma apostila de atividades investigativas relacionadas aos mesmos.

Diversas pesquisas têm sido realizadas sobre o uso de *applets* na aprendizagem matemática [13, 14, 15, 16]. O diferencial deste artigo em relação aos trabalhos anteriormente citados é a proposta pedagógica da unidade de aprendizagem. Esta possibilita o uso de *applets* associado a atividades investigativas, permitindo o estabelecimento de conjecturas sobre tópicos de Trigonometria. Além disso, todos os *applets* da unidade foram totalmente desenvolvidos por professores de Matemática, o que favorece as características pedagógicas dos mesmos.

Nesse contexto, este artigo descreve os objetivos, o desenvolvimento e os resultados da validação da unidade de aprendizagem online "Trigonometria Dinâmica". Para tanto, nas seções 2 e 3, descrevem-se, respectivamente, as motivações e as fases de desenvolvimento da referida unidade (concepção, preparação, implementação e validação). Na seção 4, analisam-se os resultados da validação da unidade, que ocorreu em duas partes, a primeira com um grupo de licenciandos e professores de Matemática e a segunda, com alunos do Ensino Médio. Finalizando, a seção 5 apresenta algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido.

2 Unidade "Trigonometria Dinâmica": motivações

Trigonometria é um tema matemático estudado no Ensino Médio. O seu significado (do grego trigonon, "triângulo", e metron, "medida") remete ao estudo puro e simples das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos [17]. Porém, o estudo da Trigonome-

[1] O objetivo do PISA é fornecer indicadores para a discussão da qualidade da Educação Básica, que possam subsidiar políticas nacionais de melhoria da educação. No Brasil, em 2006, 9.295 estudantes na faixa de 15 anos (do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental e do 1º e 2º anos do Ensino Médio) participaram da avaliação do PISA. Numa escala de 0 (zero) a 800, os estudantes brasileiros obtiveram uma média de 369,52 pontos na prova de Matemática. Com esse desempenho o Brasil ficou em 54º lugar em Matemática, numa prova da qual participaram 57 países [2] .

[2] Projeto "Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática" (http://www.es.cefetcampos.br/softmat/projeto_TIC/), vinculado ao Instituto Federal (IF) Fluminense Campus Campos-Centro.

tria evoluiu bastante e, atualmente, se faz presente em diversas ciências e na alta tecnologia [18].

Segundo Lima *et al.* [19], praticamente tudo o que envolve cálculo de distâncias está relacionado à Trigonometria. Destacam-se algumas aplicações do referido tema: (i) estudo dos movimentos dos astros [20]; (ii) aplicação em métodos de nivelamento para determinar a diferença de nível entre dois ou mais pontos de um terreno - Topografia [21]; (iii) no GPS (*Global Positioning System* ou Sistema de Posicionamento Global): este aparelho utiliza técnicas de triangulação e cálculos trigonométricos, que se assemelham muito aos mais tradicionais processos de localização, baseados em instrumentos convencionais [20]; (iv) aplicações na Física: leis da refração da luz e fenômenos físicos chamados periódicos (movimento harmônico simples) [20].

Diversas pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria têm sido realizadas [22, 23, 24]. Costa [22] investigou a influência de dois diferentes contextos (o computador e o “mundo experimental”) na aprendizagem de Trigonometria. Lindegger [23] investigou uma abordagem para o ensino de Trigonometria no triângulo retângulo, introduzindo conceitos a partir da manipulação de modelos, no Ensino Fundamental. Martins [24] introduziu os conceitos de seno e cosseno no triângulo retângulo, na circunferência trigonométrica e no plano cartesiano, de forma coordenada, na tentativa de propiciar condições aos alunos do Ensino Médio de atribuírem significados a tais conceitos.

As referidas pesquisas destacam problemas diagnosticados no estudo de Trigonometria:

(i) uso de ponto indicando uma multiplicação entre “cos” e “x”, por exemplo. Segundo Lindegger [23], isto acontece pois, provavelmente, o aluno não compreendeu o significado de cosseno de um arco x, bem como a sua representação simbólica “cos x”. O aluno estaria fazendo uma associação indevida entre “cos x” e algo como “5y”. Assim, como 5y significa 5.y, cos x deveria ser o produto cos.x. Martins [24] cita a representação $\frac{\cos x}{x} = \cos$ como um erro de mesma natureza;

(ii) obtenção e admissão de valores como cos x = 3,8 [23], não levando em consideração que cos x está limitado ao intervalo [-1, 1];

(iii) escrita, por exemplo, da sentença tg x = 1 => tg x = 45º. Segundo Lindegger [23], trata-se de um erro conceitual, pois mesmo que o aluno tenha interpretado, corretamente, que tg x = 1 refere-se ao ângulo de medida 45º, ele não soube diferenciar o significado dos símbolos x e tg x;

(iv) falta de significado das razões trigonométricas, ou erro de notação, que leva o aluno a escrever tg = $\frac{sen}{\cos}$ [23];

(v) dificuldade de compreensão da unidade de medida radiano. Segundo Costa [22], isto acontece devido ao fato da unidade de medida angular grau e seus múltiplos serem estudados antes do radiano, em outros contextos, e ao fato da unidade radiano estar associada a um arco da circunferência trigonométrica;

(vi) consideração dos arcos de medida $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, por exemplo, como sendo iguais, pelo fato de ambos terem a mesma extremidade na circunferencia trigonométrica, embora um seja positivo e outro negativo [24].

Observa-se, assim, que as dificuldades relacionadas à Trigonometria são diversas. Por outro lado, a importância deste tema ressalta a necessidade de que o mesmo seja bem compreendido, de forma a facilitar o entendimento de suas aplicações. Diante desse contexto, defende-se que as TICs podem ser recursos favoráveis, se utilizadas em atividades investigativas. Em particular, *applets* são recursos interessantes pois permitem manipulação de variáveis e situações com maior controle do processo por parte do aluno.

A unidade de aprendizagem “Trigonometria Dinâmica” é composta de páginas HTML e contém 19 *applets* para estudo de Trigonometria. *Applets* (*applets* Java) são programas desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML [25]. Estes, em geral, visam adicionar interatividade a aplicações Web. Os *applets* da unidade permitem o estudo de Trigonometria associado à Geometria Plana, de forma dinâmica, o que favorece uma análise menos algébrica do tema. Esta abordagem menos algébrica é coerente com a preocupação de Vergnaud [3], mencionada na introdução deste artigo, com relação ao excesso de simbolismo utilizado na Matemática. A unidade contém, ainda, uma apostila de atividades investigativas associadas aos *applets*, aspectos históricos sobre Trigonometria, aplicações do tema a outras áreas e *links* para endereços eletrônicos que abordam o assunto.

O GeoGebra[1] (Figura 1) foi o *software* utilizado no desenvolvimento dos *applets*. Trata-se de um *software*

[1] http://www.geogebra.at/

gratuito, que possibilita o trabalho com Matemática Dinâmica. A expressão “Matemática Dinâmica” é utilizada por Markus Hohenwarter, criador do GeoGebra, ao explicar as funções do mesmo. Seria uma extensão da definição de "Geometria Dinâmica". Segundo Braviano e Rodrigues [26], a Geometria Dinâmica permite a elaboração de construções eletrônicas, nas quais os elementos básicos podem ser movimentados na tela do computador, sem alterar as posições relativas entre esses elementos e os objetos construídos a partir deles. Além de objetos geométricos, o GeoGebra dá um caráter dinâmico a outros objetos matemáticos como funções, gráficos, números, fórmulas, entre outros, o que justifica a expressão “Matemática Dinâmica”. O nome da unidade de aprendizagem, descrita neste artigo, decorre da definição de Geometria Dinâmica e de Matemática Dinâmica, visto que os *appltes* disponibilizados possibilitam movimentações, que permitem o estabelecimento de conjecturas.

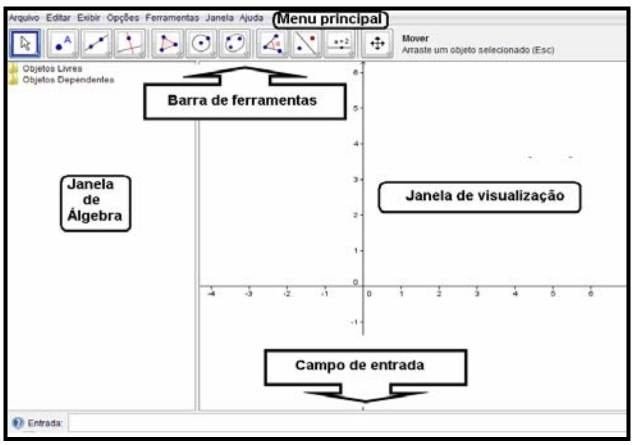


Figura 1: *Software* GeoGebra

Os *applets* da unidade “Trigonometria Dinâmica” foram desenvolvidos como construções no GeoGebra e transformados em *applets* por meio de recursos deste próprio *software*.

A facilidade de gerar os *applets* e de disponibilizar nos mesmos todas as ferramentas do GeoGebra, foi um aspecto bastante favorável ao desenvolvimento destes programas interativos, fundamentais na composição da unidade. Ressalta-se que todos os *applets* da unidade foram desenvolvidos por professores de Matemática, sem qualquer ajuda de especialistas da área de informática. Este é um aspecto bastante positivo em termos educacionais, pois o foco não fica restrito a características técnicas, mas sim nas características pedagógicas.

3 Desenvolvimento da unidade: descrição das etapas

O desenvolvimento da unidade de aprendizagem foi dividido em quatro etapas: concepção do projeto, planificação, implementação e validação [27].

3.1 Concepção

O objetivo geral é colaborar para o estudo de Trigonometria, por meio de recursos interativos. A unidade é direcionada a alunos do Ensino Médio, no entanto, pode, também, ser utilizada por alunos da Licenciatura em Matemática.

A proposta pedagógica da unidade encontra-se fundamentada na teoria sócio-histórica. Foram, especialmente, considerados os conceitos de mediação, signos e zona de desenvolvimento proximal (ZDP) para a concepção e posterior validação do projeto. Na teoria sócio-histórica, a cognição humana é resultante da ação do sujeito em interação social. Em particular, o uso voluntário, consciente e intencional de signos, no âmbito de um contexto sócio-cultural, visando à resolução de problemas, constitui-se no que se denomina mediação. A mediação é uma característica da cognição humana que se refere à internalização de atividades e comportamentos sócio-históricos e culturais, incluindo o uso de ferramentas e de signos em um contexto social [28]. A combinação do uso desses instrumentos, chamados mediadores, possibilita o desenvolvimento da cognição e da aprendizagem, que se constitui como um processo que vai do social (inter) para o individual (intra). Logo, a mediação é um processo que envolve o potencial das ferramentas para modelar a ação e o uso das mesmas por parte dos indivíduos.

A mediação se concretiza na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), entendida como uma estrutura de ação conjunta com participantes com níveis de responsabilidade e competência diferenciados, que trabalham juntos para a resolução de problemas [29]. Os mediadores, sejam humanos ou materiais, têm um papel fundamental na mediação. Os recursos pedagógicos (*applets* e apostila de atividades) desenvolvidos e disponibizados na unidade são instrumentos mediadores que podem contribuir para a criação de ZDPs, quando utilizados em um processo de interação social com a participação ativa de alunos e professor. O papel do mediador, incentivando reflexões por meio das ajudas oferecidas, é importante para a autonomia do aluno e a apropriação do conhecimento [30].

3.2 Planificação

Na etapa de planificação definiu-se a estrutura da unidade, estabelecendo que esta seria desenvolvida em HTML, contendo, principalmente, *applets* e uma apostila de atividades investigativas. A partir dessas definições, foi elaborado o *storyboard* da unidade, como modelo conceitual que orientou o desenvolvimento. Este permitiu organizar seções e subseções, assim como, os conteúdos e recursos a serem disponibilizados nas mesmas.

Além disso, foram definidos os tópicos de Trigonometria a serem contemplados nos *applets*, assim como, quantos *applets* seriam necessários para estruturar a abordagem de cada tópico:

(i) **Trigonometria no triângulo retângulo**: dois *applets* que possibilitam o estudo de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo, sendo que um deles permite observar a relação existente entre as razões trigonométricas dos dois ângulos agudos;

(ii) **Medida de ângulos**: um *applet* que permite o estudo de unidades de medida de ângulos (graus e radianos);

(iii) **Circunferência trigonométrica**: seis *applets*, sendo o primeiro destinado à apresentação da circunferência trigonométrica, o segundo à definição da função de Euler e os demais, ao estudo de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, na referida circunferência;

(iv) **Relações na circunferência trigonométrica**: são quatro *applets* que possibilitam a investigação das relações entre o seno e cosseno de ângulos complementares (que somam 90º); explementares (que diferem de 180º); suplementares (que somam 180º); replementares (que somam 360º);

(v) **Funções trigonométricas**: seis *applets*, dos quais quatro permitem estudar os gráficos das funções seno, cosseno, tangente e cotangente associados à circunferência trigonométrica, e dois permitem o estudo de transformações gráficas das funções seno e cosseno.

3.3 Implementação

Na etapa de implementação foram definidos, inicialmente, os *softwares* a serem utilizados: i) GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/) na elaboração dos *applets*; ii) NVU (http://nvudev.com/index.php) no desenvolvimento das páginas HTML; iii) Régua e Compasso (http://www.ntegravatai.relrs.g12.br/progr/ReC/) e FX - The Efeito Generator (http://www.effectgenerator.com) na elaboração de animações; iv) Wink (http://www.debugmode.com/wink/) na elaboração de tutorial.

A seguir, foram elaborados os *applets,* tendo em vista que estes deveriam ser interativos e possibilitar o estabelecimento de conjecturas. A medida que os *applets* correspondentes a cada tópico de Trigonometria eram elaborados, estes passavam por uma revisão por parte da própria equipe do projeto de pesquisa[1]. Após a elaboração de todos os *applets*, estes passaram, ainda, por uma revisão final, para analisar a coerência entre os mesmos.

Em paralelo às revisões finais dos *applets*, foi elaborada a apostila de atividades investigativas “Estudando Trigonometria com *applets* desenvolvidos no s*oftware* GeoGebra”. Esta contém onze atividades e conclusões referente às mesmas, a fim de formalizar o que se espera que seja conjecturado pelos alunos com o uso dos *applets*. As referidas atividades apresentam uma abordagem diferenciada dos exercícios tradicionais dos livros didáticos e devem ser realizadas utilizando os *applets*. O quadro 1 mostra um exemplo de atividade. A apostila contém, ainda, uma segunda parte, com seis exercícios de aplicação dos conceitos abordados nas referidas atividades pedagógicas.

10.1- Clique em “Seno e Cosseno de ângulos replementares” no menu. Observe o *applet* e anote o valor de:
a) sen α = ______ b) cos α = ______ c) sen β = sen (360º - α) = ______ d) cos β = cos (360º - α) = ______ Compare os valores encontrados nos itens acima.
10.2- Mova o seletor correspondente à medida do ângulo α até obter α = 43º e anote os valores representados na tela de:
a) sen α = ______ b) cos α = ______ c) sen β = sen (360º - α) = ______ d) cos β = cos (360º - α) = ______ Compare os valores encontrados nos itens acima.
10.3- Escolha outro valor para α, movendo o seletor correspondente e anote o valor de:
α = ______ a) sen α = ______ b) cos α = ______ c) sen β = sen (360º - α) = ______ d) cos β = cos (360º - α) = ______ Compare os valores encontrados nos itens acima.
10.4- Descreva o que você observou.

Quadro 1: Exemplo de atividade pedagógica

São descritos, a seguir, alguns *applets* e seus objetivos. Para facilitar a descrição dos mesmos foram colocadas indicações de suas partes: “parte 1”, “parte 2”, “parte 3” (o *applet* em si não possui tais indicações). Ressalta-se que na página de cada *applet* são apresentadas orientações de uso do mesmo.

[1] A referida equipe é composta por duas professoras de Matemática e uma bolsista de iniciação científica (aluna da licenciatura em Matemática).

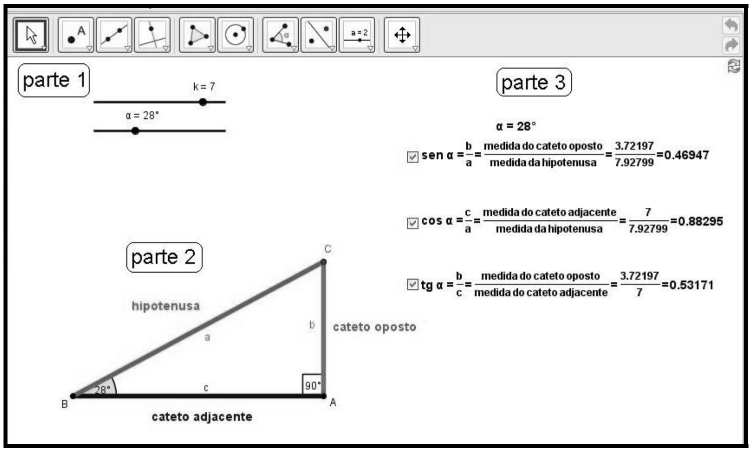


Figura 2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

A Figura 2 apresenta o *applet* para o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Por meio do mesmo é possível analisar que as razões trigonométricas dependem somente do ângulo agudo considerado. Na parte 1, encontram-se os seletores[1] **k** e **α**. A movimentação do primeiro seletor permite alterar as medidas dos lados do triângulo (parte 2) e a do segundo seletor altera a medida do ângulo α, assinalado no triângulo. Essas alterações mudam, ou não, os valores das razões na parte 3.

O *applet* apresentado na Figura 3, tem por objetivo apresentar a circunferência trigonométrica.

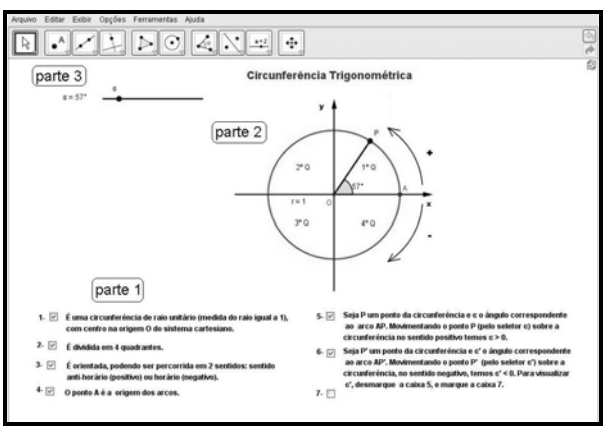


Figura 3: Circunferência trigonométrica

Na parte 1 (Figura 3) encontram-se caixas numeradas de 1 a 7, que serão marcadas pelo usuário. Ao marcar a caixa 1, por exemplo, aparece o texto "É uma circunferência de raio unitário (medida do raio igual a 1), com centro na origem O do sistema cartesiano.", ao mesmo tempo que aparece o ponto O e o texto "r = 1" na circunferência trigonométrica (parte 2). Ao marcar a caixa 5, por exemplo, além do texto correspondente, aparecem na circunferência o ponto P e o ângulo α, bem como o seletor correspondente a esse ângulo, na parte 3. Ao movimentar o seletor **α**, o ponto P "caminha" no sentido anti-horário sobre circunferência, alterando a medida do ângulo α.

A Figura 4 apresenta o *applet* que visa mostrar a correspondência entre números reais e pontos na circunferência. A maneira mais natural de fazer essa correspondência é por meio da função de Euler E: IR → C, cujo contradomínio é a circunferência C de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano [18]. Esta função faz corresponder a cada número real t o ponto E(t) = (x, y) da circunferência unitária [18].

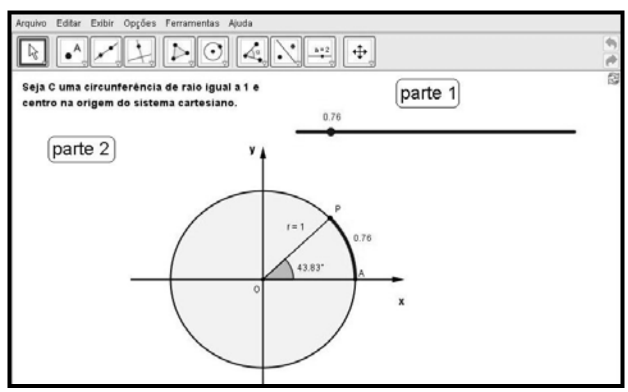


Figura 4: Função de Euler

Na parte 1 (Figura 4), encontra-se o seletor que representa o intervalo real [0; 6,28]. Ao movimentar o seletor, a sua imagem (ponto P), percorre sobre a circunferência trigonométrica (parte 2), no sentido anti-horário, um arco $\overset{\frown}{AP}$, de comprimento igual ao número real mostrado no

[1]Seletor é um recurso do GeoGebra que representa, graficamente, um número ou um ângulo livre, associado a uma construção. Assim, ao ser movimentado, o seletor altera os elementos da construção que são dependentes dele.

seletor. Para cada número real t indicado no seletor, tem-se um ângulo AÔP, na circunferência, que mede t radianos. Dessa forma, associa-se cada número real do intervalo real [0; 6,28] a um ponto da circunferência. Esta associação pode ser estendida a todo número real.

O *applet* mostrado na Figura 5 visa possibilitar o estudo de seno e cosseno na circunferência trigonométrica.

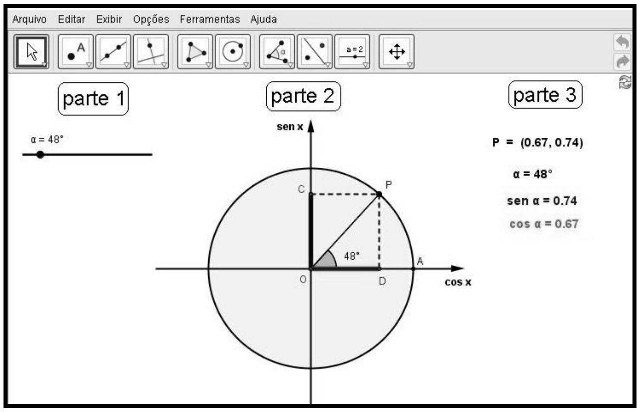


Figura 5: Seno e cosseno na circunferência trigonométrica - sentido anti-horário

Na parte 1 (Figura 5) encontra-se o seletor **α**. Ao movimentá-lo, a medida do ângulo α, assinalado na circunferência trigonométrica (parte 2), se altera, assim como os valores do seno e do cosseno do ângulo (parte 3). Na circunferência, o seno e o cosseno do ângulo são representados, geometricamente, pelos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$, respectivamente. Um *applet* semelhante foi elaborado para o estudo de seno e cosseno de arcos com extremidade na primeira volta negativa (sentido horário).

A Figura 6 apresenta o *applet* que focaliza as relações entre os valores do seno e cosseno de ângulos complementares.

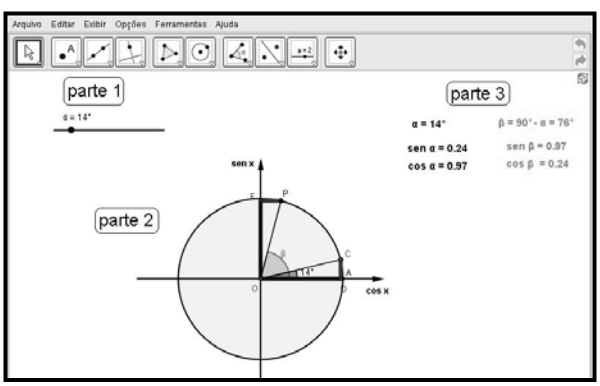


Figura 6: Relações entre seno e cosseno de ângulos complementares

Na parte 1 desse *applet*, encontra-se o seletor **α**, que ao ser movimentado, altera a medida do ângulo α assinalado na circunferência trigonométrica (parte 2). Conseqüentemente, a medida do ângulo β também se altera, uma vez que existe uma relação entre eles (registrada na parte 3). Assim, alterando a medida dos ângulos, o seno e o cosseno mostrados na parte 3, também se alteram, sendo possível verificar as relações entre os mesmos. Este *applet* permite observar, por exemplo, que sen 30º = cos 60º e sen 60º = cos 30º.

Para o estudo da definição de função seno foi elaborado o *applet* apresentado na Figura 7. Na parte 1, encontram-se caixas numeradas. À medida que as caixas são marcadas, aparecem os textos correspondentes, bem como os elementos associados a estes na circunferência trigonométrica (parte 2). Ao marcar a caixa 1, por exemplo, aparece o texto "*Seja um número real x, com imagem P na circunferência trigonométrica, e α o ângulo correspondente ao arco AP.*" e são mostrados, também, o ponto P e o ângulo α na circunferência trigonométrica.

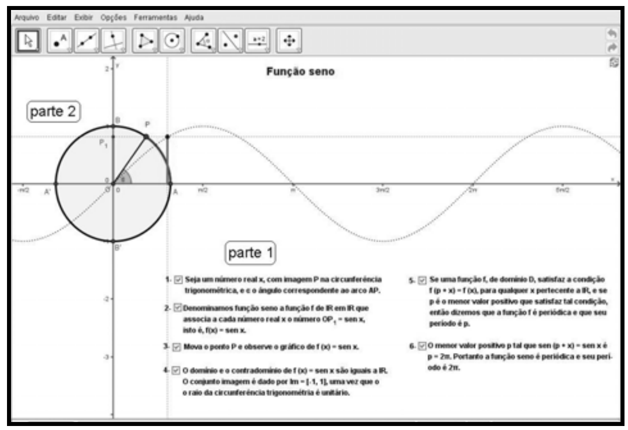


Figura 7: Função seno no plano cartesiano e na circunferência trigonométrica

A Figura 8 apresenta o *applet* para o estudo das transformações gráficas causadas pelos parâmetros *a*, *b*, *c* e *d* nas funções da forma g(x) = *d* + *a* sen (*b*x + *c*), em relação à f(x) = sen x. A parte 1 contém os seletores **a, b, c** e **d**, que ao serem movimentados, alteram, respectivamente, os valores dos referidos parâmetros. A função *g* é representada, graficamente, na parte 2 e, algebricamente, na parte 3. Assim, é possível comparar o gráfico da função *g*, após a movimentação, com o gráfico da função *f*. *Applet* semelhante foi elaborado para verificar a influência desses parâmetros na função f(x) = cos x.

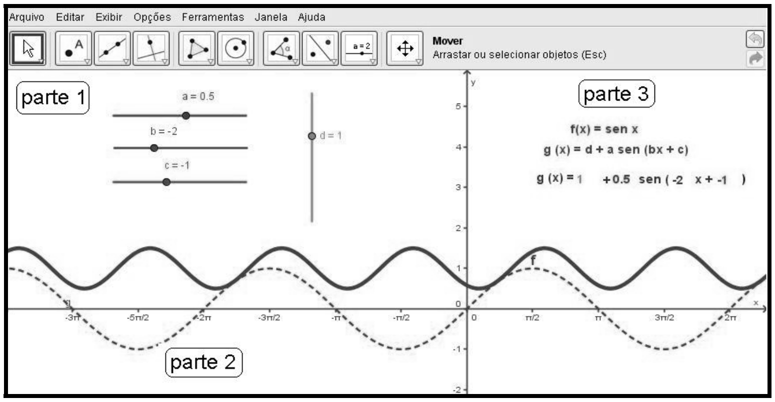


Figura 8: Transformações gráficas da função seno

Após a elaboração e várias revisões dos *applets* e da apostila de atividades, teve início o desenvolvimento da unidade de aprendizagem. Esta foi desenvolvida em HTML. Descrevem-se, a seguir, as seções da unidade.

Na tela de introdução, aparece uma imagem que não é estática. Trata-se de uma animação, na qual o ponto P percorre a circunferencia trigonométrica no sentido anti-horário e, simultaneamente, são mostrados o seno e o cosseno dos arcos $\overset{\frown}{AP}$, sendo A o ponto (1,0).

Após a introdução, encontra-se a seção de **Apresentação**, que contém o objetivo da unidade. Além da referida seção, a unidade possui outras cinco:

(i) **Aspectos Históricos**: apresenta, resumidamente, a história da Trigonometria;

(ii) **Applets**: contém *links* para os 19 *applets* e para um tutorial sobre a elaboração de *applets* no *software* GeoGebra (Figura 9);

(iii) **Apostila**: disponibiliza a apostila de atividades;

(iv) **Aplicações**: apresenta aplicações do tema em estudo, em outras áreas do conhecimento, e um vídeo que mostra situações reais nas quais a Trigonometria pode ser utilizada;

(v) **Links**: contém outros endereços eletrônicos relacionados ao tema;

(vi) **Créditos**: apresenta os nomes dos autores e dos *softwares* utilizados.

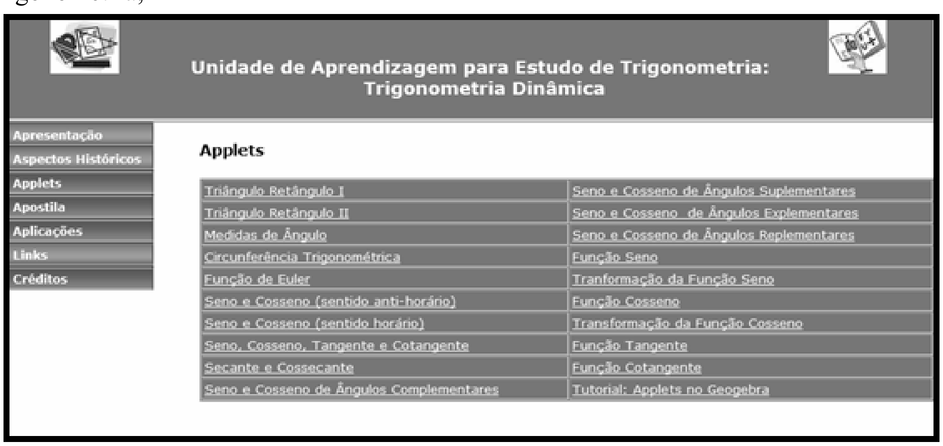


Figura 9: Tela com *links* para os *applets*

3.4 Validação

A validação da unidade “Trigonometria Dinâmica” foi dividida em duas partes: validação preliminar, com licenciandos e professores de Matemática, e validação com alunos de Ensino Médio do IF Fluminense Campus Campos-Centro.

A validação preliminar (validação em forma de estudo piloto), teve como objetivo identificar possíveis falhas na unidade. A referida validação ocorreu por meio de um minicurso, mediado pelas autoras deste artigo, no IF Fluminense Campus Campos-Centro. Este ocorreu nos dias 21 e 28 de julho de 2008, totalizando 6 horas. Participaram do mesmo 10 licenciandos e 3 professores de Matemática, convidados por possuírem conhecimentos de

Trigonometria e, também, de Informática Educativa.

A validação com alunos de Ensino Médio ocorreu também no IF Fluminense Campus Campos-Centro, tendo como objetivo verificar a adequação da unidade ao seu público alvo. Esta validação ocorreu nos dias 29 de setembro, 01 e 03 de outubro de 2008, com 12 alunos, totalizando 8 horas.

4 Resultados e discussão

Descrevem-se, nesta seção, a coleta e análise de dados da validação preliminar e da validação com alunos do Ensino Médio.

4.1 Análise da validação preliminar

As atitudes dos participantes, seus questionamentos e comentários na utilização dos recursos da unidade de aprendizagem, durante o minicurso, possibilitaram o registro de situações importantes para o alcance dos objetivos da validação.

Os participantes visitaram a unidade, resolveram as atividades e manipularam os *applets* sem dificuldade. Não foram detectadas correções a serem realizadas nas páginas da unidade, no entanto, foram sugeridas algumas mudanças na estrutura da apostila e diagnosticados alguns equívocos nos *applets*, como descrito a seguir.

Foi verificado que no *applet* da Função de Euler, os pontos (-1, 0), (0, -1) e (1, 0) eram exibidos como (-1, -0), (-0, -1) e (1, -0), respectivamente. No *applet* da Atividade 7, os valores do seno e cosseno dos ângulos α e β, mostrados na tela, estavam trocados. Os dois problemas foram devidamente solucionados, posteriormente. Com relação à apostila, foi observado que após alguns itens de certas atividades eram apresentadas observações, que continham, na verdade, as respostas dos itens que as precediam. Isto poderia implicar a cópia das respostas pelos alunos, a partir do momento em que estes percebessem o padrão da apostila. Esta análise fez com que as observações fossem reorganizadas, de forma mais genérica, e apresentadas ao fim da atividade (não mais após alguns itens da mesma).

Os exercícios finais, da segunda parte da apostila, não foram resolvidos, em virtude do tempo. Considera-se, no entanto, que o objetivo dessa validação não foi afetado por esse fato, uma vez que os referidos exercícios são semelhantes aos que os livros didáticos apresentam.

Ao final da validação, os participantes responderam a um questionário, com onze perguntas, sendo dez semiabertas[1] e uma aberta. Estas tiveram por objetivo levantar dados sobre as atividades e os *applets*, tais como clareza e sua adequação ao público alvo, bem como possíveis experiências anteriores dos participantes com relação ao uso de tecnologias digitais. A última pergunta, que é aberta, solicitava que os participantes apontassem possíveis vantagens e desvantagens do uso de tecnologias digitais na formação do professor de Matemática. O questionário foi entregue pelos participantes, juntamente com a apostila respondida, para que as respostas fossem analisadas. Os resultados considerados mais significativas são comentados a seguir.

Com relação à possibilidade de aplicação de parte do minicurso na prática docente dos participantes, foram dadas três opções de resposta: “sim”, “não” e “depende”, sendo solicitada uma justificativa para a opção escolhida. Doze participantes responderam “sim”, dos quais sete consideraram que o uso dos *applets* facilita a aprendizagem do conteúdo; dois justificaram pela possibilidade de visualização e movimentação; um considerou ser uma forma rápida de estudar o conteúdo; e dois destacaram a importância da utilização de novos recursos tecnológicos na educação. Apenas um participante assinalou a opção “depende”, justificando a opção pela necessidade de existência de recursos tecnológicos na escola. Esses resultados foram considerados bastante satisfatórios, uma vez que a única resposta não positiva não foi decorrente de problemas nos recursos analisados. A falta de recursos tecnológicos na escola é uma questão pertinente. Ressalta-se, no entanto, que o uso dos recursos da unidade, por meio de apenas um computador e um projetor multimídia, pode contribuir para o estudo do tema. Estes equipamentos, que, atualmente, muitas escolas possuem, podem minimizar o problema da falta de laboratório de informática nas escolas.

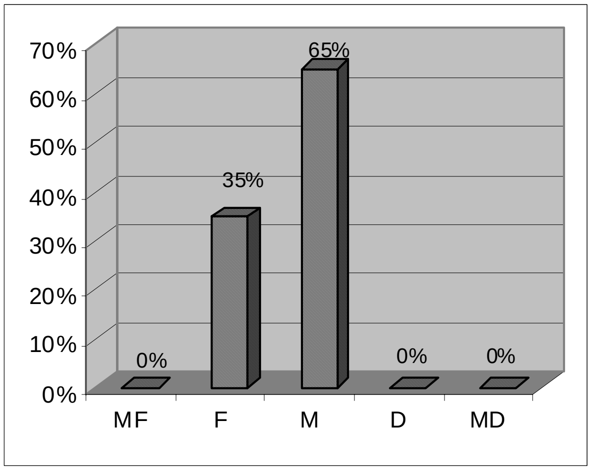
Quanto aos enunciados, todos os participantes consideraram que estes estavam claros. Concluiu-se, então, que não seria necessário promover qualquer alteração nos mesmos. Atribui-se a esse fato às inúmeras revisões feitas durante a elaboração das atividades.

A maioria dos participantes considerou o nível das atividades como “moderado”, uma vez que as mesmas seriam aplicadas a alunos que nunca estudaram o conteúdo. O restante considerou o nível das atividades “fácil”. O Gráfico 1 apresenta os resultados. Alguns comentários dos participantes que assinalaram a opção “moderado”, são destacados:

> “Acho que para um público que nunca viu o conteúdo, poderia ter algumas dificuldades” (Participante 1).

[1] As semiabertas são questões que introduzem, por exemplo, o item “outros”, dando possibilidade de resposta para além das previstas, ou possibilitam a justificativa de uma resposta padronizada.

“Foi fácil, pois já tenho um certo conhecimento, já quem não tem, considero moderado” (Participante 5).



Legenda:

MF: Muito Fácil	F: Fácil	M: Moderado
D: Difícil	MD: Muito Difícil	

Gráfico 1: Nível das Atividades

Todos os participantes consideraram que o uso de *applets* favorece a construção de conhecimentos matemáticos. Destacam-se algumas justificativas:

“O fato dos alunos poderem vivenciar as transformações, deixa o tema muito mais claro do que só exposto pelo professor em sala de aula com quadro e giz (Participante 2).

“Pelo fato da observação e movimentação, que não são possíveis com lápis e papel” (Participante 6).

Estas justificativas ressaltam a importância, para a aprendizagem, da visualização e da movimentação possibilitadas pelos *applets*. A visão desses participantes está coerente com a de Santos[1] [16], quando este afirma que o uso de *applets* possibilita experimentações, criando uma intuição sobre determinado conceito, permitindo que o mesmo seja construído de forma consistente. O referido autor destaca ainda a praticidade de uso dos *applets*.

Com relação ao papel do professor durante a utilização dos *applets*, 62% dos participantes consideraram “muito importante” e o restante considerou “importante” a presença deste como mediador no processo de ensino aprendizagem e construção do conhecimento. Destacam-se alguns comentários feitos pelos participantes que consideram “muito importante” o papel do professor:

“O professor tem o papel de auxiliar o aluno, e ele é o mediador entre a tecnologia e o aluno. Ele possui um papel fundamental’ (Participante 3).

“Sem o professor conduzindo o trabalho, ele pode perder até mesmo seu objetivo principal” (Participante 7).

Os índices e as justificativas retratam a importância dos mediadores do conhecimento, o que está coerente com a teoria sócio-histórica. Segundo Vygotsky [28], os parceiros mais experientes têm papel fundamental na ZDP, sejam adultos ou companheiros de mesma idade e, da mesma forma, no ambiente escolar, o professor.

A última pergunta questionava sobre a importância do uso de tecnologias digitais na formação do professor de Matemática, solicitando que fossem apontadas vantagens e desvantagens. Apresenta-se uma resposta:

“Com a aprendizagem do uso de tecnologias digitais na formação do professor, fica mais fácil para eles prepararem uma aula mais atrativa, com interação, facilitando a aprendizagem” (Participante 4).

Estes comentários estão de acordo com Ponte, Oliveira e Varandas [12] quando defendem que os professores precisam saber usar as TICs, uma vez que estas são instrumentos que auxiliam na preparação das aulas e na aprendizagem dos alunos, dentre outras coisas.

A validação preliminar foi muito importante. Permitiu verificar que as atividades estão adequadas ao Ensino Médio dos alunos e que estas, juntamente com os *applets*, possibilitam o alcance dos objetivos propostos.

Após a realização das alterações na apostila e a correção dos equívocos encontrados nos *applets*, ocorreu a validação, propriamente dita, com alunos do Ensino Médio, como descrito na próxima seção.

4.2 Análise da validação com alunos do Ensino Médio

A validação da unidade com alunos do Ensino Médio ocorreu no IF Fluminense Campus Campos-Centro. O objetivo era validar a unidade com alunos sem conhecimentos sobre o tema (exceto sobre triângulo retângulo, assunto estudado no nono ano do Ensino Fundamental). Como as turmas do segundo ano do Ensino Médio da referida instituição já haviam estudado Trigonometria, foi escolhida uma turma do primeiro ano.

Participaram da validação 12 alunos da referida turma, que tiveram interesse e disponibilidade. Foram necessários três encontros: os dois primeiros com duração de 2 horas e 30 minutos, e o último com duração de 3 horas. Os encontros foram realizados em um laboratório de informática, no qual cada aluno usou um computador. Também foi usado um projetor de multimídia, por meio do qual foram apresentados os *applets* utilizados, facilitando a discussão e correção das atividades.

[1] O autor faz uso do termo *mathlets* para *applets* direcionados ao estudo de temas matemáticos, sendo *mathlet* um acronômio “*mathematic’s applet*” (*applet* de Matemática).

Iniciando o primeiro encontro, os alunos visitaram a unidade. A seguir, foram apresentados o recursos dos *applets* que seriam utilizados no decorrer das atividades, tais como a ferramenta “Mover”, o “Campo de Entrada” e a “Janela Algébrica”. Foi explicado, também, o uso do seletor. Destaca-se que os alunos utilizaram os *applets* com igual ou maior facilidade do que os participantes da validação preliminar, que já conheciam os recursos dos *applets*, pois já haviam utilizado o *software* GeoGebra. Este fato, provavelmente, é conseqüência do uso de tecnologias, por parte destes alunos, em outras situações do dia-a-dia.

No primeiro encontro, foram realizadas as atividades 1, 2 e 3. As atividades 4, 5, 6 e 7 foram resolvidas no segundo encontro, e as demais no último dia. Para Possibilitar um processo de mediação as atividades foram propostas para serem desenvolvidas em duplas. Nesta etapa utilizou-se a técnica de observação participante para a coleta de dados, com registros das pesquisadoras. A seguir, analisam-se alguns eventos, considerados significativos.

Na atividade 1, item 1.2, vários alunos questionaram se estavam resolvendo corretamente, pois os valores das razões trigonométricas não se alteravam. A partir disso, foi promovida uma discussão sobre a justificativa deste fato, envolvendo todo o grupo na interação. Aproveitando a resposta de um aluno, que mencionou que os triângulos formados eram semelhantes, as mediadoras levantaram questionamentos relacionados à definição de semelhança de triângulos. Por questões de espaço não se reproduz a descrição do processo mediacional, mas o mesmo aconteceu entre mediadoras e alunos, a partir de perguntas e hipóteses levantadas pelo grupo. Dessa forma, os alunos concluíram que os triângulos retângulos formados eram semelhantes e, portanto, a razão entre os lados não mudava. Esta situação mostrou a relação entre os dois conceitos, razões trigonométricas e semelhança de triângulos, o que ressalta o aspecto encadeado da Matemática [4], mencionado na introdução deste artigo. O incentivo a discussões e a retomada de pré-requisitos foram constantes durante o experimento. Tais atitudes devem ser marcantes no papel assumido pelo professor, diante do uso das TICs [12] e no processo de mediação [30].

No item 1.3, um aluno comentou que encontrou $\alpha = 0^o$ e mostrou a construção apresentada na Figura 10. Tal situação não era esperada, uma vez que $\alpha = 0^o$ não determinaria o triângulo ABC. Esta situação ilustra o fato alertado por Borba e Penteado [31], quando ressaltam que, ao usar recursos tecnológicos digitais, o professor deve estar disposto a lidar com situações imprevisíveis.

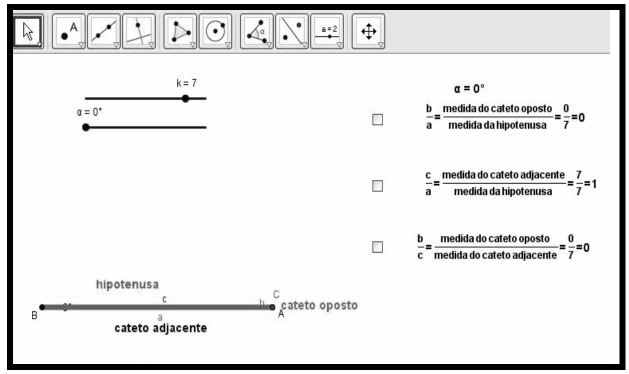


Figura 10: *Applet v*isualizado quando $\alpha = 0^o$

É importante ressaltar que este problema não foi detectado durante a validação preliminar. O problema foi solucionado com a limitação do seletor **α** entre 1º e 89º e não mais entre 0º e 89º, uma vez que este seletor está programado para exibir os ângulos sem casas decimais.

Na atividade 2, foi possível perceber que a relação entre os valores da tangente de ângulos complementares não foi compreendida por todos os alunos. Foi necessário, então, que durante a discussão com o grupo, fosse ressaltada a forma fracionária que o *applet* apresenta. Desse modo, os alunos puderam visualizar que o valor de tg α é o inverso de tg β. Novamente, ficou evidente a importância da mediação do professor. Como afirmam Gravina e Santarosa [32], a orientação do professor, mesmo em ambientes informatizados, é indispensável, uma vez que a aprendizagem nem sempre ocorre de forma espontânea.

Antes da explicação de como converter medidas de um ângulo em grau para radianos, fez-se necessário que os alunos soubessem quantos raios “cabem” em uma circunferência. Para tanto foi utilizado material concreto constituído por uma circunferência de isopor e um pedaço de cordão do tamanho do raio. Todos os alunos demonstraram ter entendido o procedimento realizado com o material concreto, uma vez que responderam, corretamente, às perguntas feitas. Analisando o resultado positivo do uso do material concreto, fica evidente que o uso de tecnologias digitais não significa abandonar outros recursos didáticos. Segundo Borba e Penteado [31], é importante refletir sobre a adequação da mídia em cada situação, avaliando o que se deseja enfatizar, escolhendo a mais adequada para alcançar o objetivo pretendido.

Na atividade 5, item 5.5, dois alunos tiveram mais dificuldade do que o esperado. Neste item foi solicitado que identificassem o sinal de alguns senos e cossenos. Por exemplo, quando foi solicitado o sinal de cos 5, os referidos alunos argumentaram que é impossível calcular o valor de um ângulo cujo cosseno é maior do que 1. Essa afirmação sinaliza que ficou claro que o cosseno (e o seno) de um número real está compreendido no intervalo de [-1, 1]. No entanto, estes alunos não compreenderam, completamente, a definição de cosseno de números reais. Sendo assim, esta definição foi retomada com questionamentos e diálogos no grupo. As diferentes necessidades de ajustes na mediação, como proposto por Passerino et al. [30], foram constatadas no presente estudo.

A leitura das observações apresentadas na apostila, após estas atividades, foi de grande importância, uma vez que continham as justificativas para as conjecturas elaboradas pelos alunos.

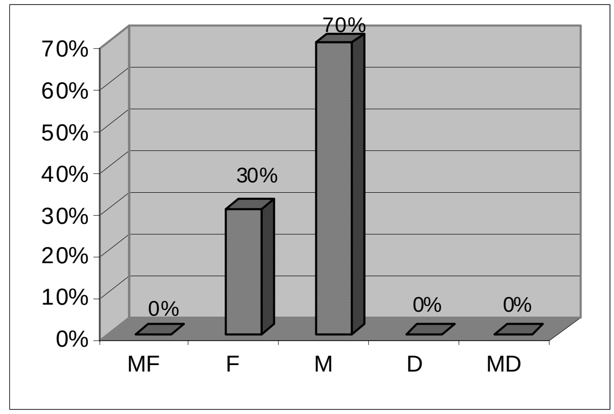
A atividade 11 tem por objetivo geral o estudo das transformações causadas pelos parâmetros *a*, *b*, *c* e *d* nos gráficos das funções da forma g(x) = *d* + *a* sen (*b*x + *c*) em relação à função f(x) = sen x. No estudo do parâmetro a, quando a = -1, os alunos tiveram dificuldade em encontrar vocabulário adequado para descrever a transformação gráfica observada. Atribui-se esta dificuldade à pouca familiaridade com atividades investigativas. De maneira geral, na análise da influência dos demais parâmetros os alunos não demonstraram dificuldades. Ressalta-se que questões semelhantes poderiam ser elaboradas em termos das demais funções trigonométricas. Para não ficar repetitivo, todo o estudo foi feito apenas em relação à função seno.

Os alunos resolveram os exercícios, da segunda parte da apostila, com facilidade. Atribui-se este fato à participação ativa dos mesmos na resolução e discussão das atividades resolvidas com o auxílio dos *applet*, que possibilitou a construção de conceitos necessários para a resolução dos referidos exercícios.

Para complementar a análise da validação, os 12 alunos responderam a um questionário. Este era composto de doze perguntas, sendo onze semiabertas e uma aberta. Estas perguntas visavam investigar a opinião dos alunos em relação às atividades e ao uso dos *applets*, além de diagnosticar os conhecimentos prévios sobre o assunto estudado. Na última pergunta, que é aberta, como no primeiro questionário, foi solicitada a opinião dos alunos sobre o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática. Os dados coletados por meio do questionário foram tabulados e analisados. Os resultados considerados mais significativos são comentados a seguir.

Com relação aos enunciados das atividades, verificou-se que 90% dos alunos consideraram os enunciados "claros" e apenas 10% consideraram "parcialmente claros". Este resultado positivo já era esperado, visto que os participantes da validação preliminar não identificaram falhas nos enunciados.

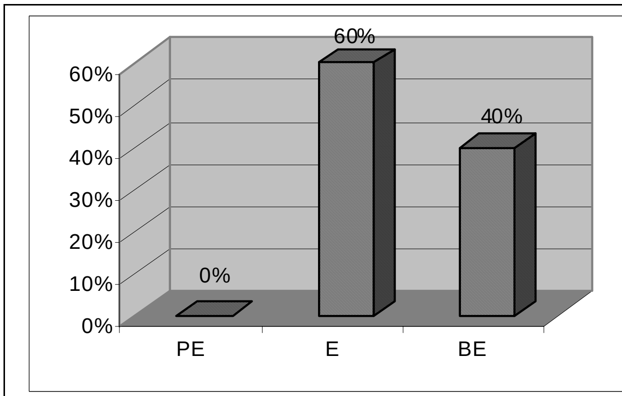
O Gráfico 2 mostra os resultados com relação ao nível das atividades. Os índices obtidos foram considerados positivos, pois o tema era novo para os alunos e as atividades não apresentam o padrão convencional dos livros didáticos. É importante ressaltar que os participantes da validação preliminar (professores e licenciandos) alertaram que as atividades poderiam apresentar nível moderado para estudantes que nunca estudaram Trigonometria.



Legenda:
MF: Muito Fácil F: Fácil M: Moderado
D: Difícil MD: Muito Difícil

Gráfico 2: Nível das atividades na validação

No Gráfico 3 são apresentados os resultados sobre a contribuição da teoria apresentada na apostila, para o esclarecimento do assunto estudado.



Legenda:
PE: Pouco esclarecedora BE: Bastante esclarecedora
E: Esclarecedora

Gráfico 3: Contribuição da teoria da apostila

Como mais da metade dos alunos respondeu que a teoria contribuiu de forma "esclarecedora" e o restante de forma "bastante esclarecedora", considera-se que a mesma foi importante para o estudo do tema.

Questionados se já possuíam algum conhecimento de Trigonometria antes da validação, cerca de 60% dos alunos responderam negativamente. Os 40% que responderam "Sim", comentaram que estudaram Trigonometria no triângulo retângulo. Esse fato já era esperado, visto que esse estudo é feito no 9º ano do Ensino Fundamental.

Esses índices ressaltam a importância da unidade desenvolvida, visto que todos os alunos afirmaram que os recursos da mesma contribuíram para a aprendizagem do tema. Apresenta-se a justificativa de um aluno:

> "Porque as atividades eram bem dinâmicas nos proporcionando uma boa compreensão" (Aluno 8).

Considera-se que a palavra "dinâmicas", na fala do aluno 8, esteja fazendo referência à possibilidade de movimentação dos *applets*, além da estrutura das atividades. Essa situação está coerente com a visão de Santos [16], quando afirma que os *applets* contribuem para que os alunos aprendam explorando e investigando, como agentes ativos do processo de aprendizagem.

Quando questionados se já haviam utilizado *applets* no contexto educacional, todos os alunos responderam que não. No entanto, 60% dos alunos consideraram a utilização de *applets* de Trigonometria "fácil", enquanto 40% consideraram "muito fácil". Atribui-se a esse fato à facilidade que os jovens têm na utilização de recursos tecnológicos. Destacam-se as justificativas dadas por dois alunos, que marcaram a opção "muito fácil":

> "Foi muito fácil, e eu achei muito interessante, uma maneira bem dinâmica de aprender Trigonometria"(Aluno 3).
>
> "Ajudou muito na hora de dúvidas, e evita que o professor escreva muito no quadro" (Aluno 7).

Estes comentários ressaltam mais uma vez, as vantagens do uso dos *applets*, visto que os estes possibilitam movimentação e, assim, os alunos não precisam visualizar figuras estáticas no papel ou no quadro.

Nenhum aluno julgou necessário que ocorressem mudanças em qualquer *applet*, o que indica que todo o esforço e as inúmeras correções que ocorreram foram válidos. Todos afirmaram que uso de *applets* favorece a construção de conhecimentos matemáticos. Esse índice é bastante significativo, pois evidencia o alcance do objetivo principal do trabalho. Destaca-se um comentário:

> "Os alunos preferem uma maneira mais dinâmica a uma aula normal, que é muito cansativa" (Aluno 2).

Este comentário está de acordo com as justificativas dadas pelos participantes da validação preliminar. Estes ressaltaram a importância da visualização e movimentação possibilitadas pelos *applets*. Além disso, o comentário confirma o que Martins [24] verificou em sua pesquisa, sobre a utilização do computador na realização de atividades de Trigonometria entusiasmar os alunos.

Com relação à importância do papel do professor durante a utilização dos *applets*, cerca de 70% dos alunos consideraram o papel do professor "muito importante", enquanto os demais consideraram "importante". Destacam-se os comentários feitos por dois alunos:

> "O computador é só uma máquina já o professor ensina de fato" (Aluno 5).
>
> "Pois é a explicação do professor que nos faz aprender melhor a matéria" (Aluno 10).

Os índices e os comentários dos alunos evidenciam a importância dos mediadores do conhecimento. Fato este verificado, também, na validação preliminar.

Por fim, os alunos foram questionados sobre a importância da utilização do uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática, apontando possíveis vantagens e desvantagens. Os alunos afirmaram que esses recursos facilitam e dinamizam a aula, permitindo visualizar o que está sendo feito e possibilitando um entendimento mais proveitoso e, até mesmo, mais rápido.

De forma geral, a observação das ações dos participantes e a análise dos dados levantados pelos questionários mostraram que os recursos da unidade "Trigonometria Dinâmica" estão adequados aos seus objetivos. Foram evidenciadas as vantagens do uso de *applets* e foi possível perceber que estes, aliados à apostila e à intervenção das mediadoras, possibilitaram a construção de conhecimentos sobre Trigonometria. Assim, foi possível verificar a importância da mediação do professor e de instrumentos para a aprendizagem, ratificando a posição de Karpov [34], quando afirma que educação é vista como um espaço social para a mediação na qual instrumentos, signos e pessoas mediam o processo de desenvolvimento.

5 Considerações Finais

O objetivo da unidade "Trigonometria Dinâmica", como já mencionado, é colaborar para o processo e ensino e aprendizagem de Trigonometria, no Ensino Médio. A referida unidade foi desenvolvida sob um enfoque sócio-histórica, assim os *applets* e as atividades propostas, que não são convencionais como as, em geral, apresentadas nos livros didáticos, são vistos como instrumentos mediadores. O uso destes instrumentos, segundo Vygotsky [28], reorganiza, de forma radical, as funções psicológicas superiores, tais como memória e atenção. O conhecimento, do ponto de vista da teoria sócio-histórica, não é algo que se transmite de uma pessoa para outra, senão que se constitui a partir de ações que se desenvolvem na interação com outros.

A partir dos resultados da validação preliminar, foi possível corrigir algumas falhas nos *applets* e, também, aprimorar a apostila. Além disso, os professores e licenciandos em Matemática, tiveram oportunidade de ter uma experiência de uso de *applets* e refletir sobre as vantagens destes recursos no ensino da Trigonometria.

Os alunos do Ensino Médio, participantes da validação, mostraram-se atentos e motivados, tentando explorar, ao máximo, os recursos dos *applets* e, assim, compreender os conceitos abordados. Foi possível observar a dificuldade destes alunos, com relação ao registro de suas respostas, principalmente nas atividades 3 e 11. Considera-se, no entanto, que tal dificuldade não seja um problema relacionado, diretamente, às atividades e nem à Trigonometria, mas sim à pouca familiaridade com atividades que possibilitem a construção de conhecimentos, ainda escassas no cotidiano.

Destaca-se que os participantes da validação preliminar demonstraram muito interesse pelas potencialidades dos *applets*, tendo em vista o uso pedagógico dos mesmos. Atribui-se isto ao fato dos *applets* possibilitarem uma abordagem diferenciada da Trigonometria que, geralmente, é tratada de maneira teórica, numa linguagem formal, exigindo abstrações. O interesse desses professores pelos *applets* pode contribuir para novas práticas docentes. Os alunos do Ensino Médio, por sua vez, expressaram mais interesse e empenho na realização das atividades com os *applets*. Considera-se que esta participação ativa deu-se pelo fato das atividades terem sido realizadas fora do horário de aula, por vontade própria, com a oportunidade de utilizar recursos tecnológicos digitais.

De maneira geral, o uso dos *applets* foi satisfatório. Estes permitiram explorar visualizações e simulações, favorecendo a construção de conhecimentos. Os *applets* para a definição da função seno e para o estudo das transformações gráficas merecem destaque. Com eles foi possível realizar, facilmente, ações que seriam mais trabalhosas utilizando lápis e papel.

Algumas dificuldades foram superadas durante o desenvolvimento da unidade. Para a elaboração dos *applets*, por exemplo, foi necessário muito estudo dos recursos do GeoGebra e de como este poderia contribuir para o estudo de Trigonometria. No entanto, o resultado foi muito gratificante, ainda mais pelo fato de serem recursos elaborados, exclusivamente, por professores de Matemática. Encontrar referencial específico sobre aprendizagem de Trigonometria com uso de tecnologias digitais, foi outra dificuldade. Porém, este fato evidencia a importância dos resultados deste trabalho para pesquisas futuras.

Nessa primeira fase, o foco foi a validação da unidade de aprendizagem “Trigonometria Dinâmica”. O estudo aqui descrito, no entanto, é parte de um trabalho mais amplo. Para a próxima fase, a proposta é analisar fenômenos de aprendizagem relacionados ao uso da referida unidade, com alunos do Ensino Médio.

Apesar do número pequeno de alunos (12 alunos) no processo de validação da unidade, foi possível vivenciar uma experiência significativa sobre o estudo de Trigonometria com o auxílio dos *applets*, como já exposto. Assim, espera-se que este trabalho mostre a importância da utilização das TICs, em especial o uso dos *applets*, no processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria, bem como de outros temas matemáticos. Além de incentivar que professores de Matemática tornem-se autores na de unidades de aprendizagem, que considerem o potencial da mediação, evidenciado na experiência descrita.

Referências

[1] J. F. L. Matos. Matemática, Educação e Desenvolvimento Social – Questionando Mitos que Sustentam Opções Atuais em Desenvolvimento Curricular em Matemática. In *Anais do Encontro Internacional em homenagem a Paulo Abrantes - Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas* Lisboa, 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jfmatos/comunicacoes.html>. Acesso em: 30/05/09.

[2] INEP. O que é o PISA. 2007. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/internacional/news07_05.htm>. Acesso em: 05/06/09.

[3] G. Vergnaud. Todos perdem quando não usamos a pesquisa na prática. *Revista Nova escola*. Rio de Janeiro: Editora Abril, 23(215): 32-36, set - 2008.

[4] E. L. Lima. *Matemática e Ensino*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, 2001.

[5] U. D’Ambrósio U. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Autêntica, Belo Horizonte-MG, 2001.

[6] T. Carraher, D. Carraher, A. L. Shliemann. *Na vida dez, na escola zero*. 14 ed. Cortez, São Paulo-SP, 2006.

[7] J. P. Gonçalves. L. Reflexões sobre os processos de ensino/aprendizagem de Matemática baseados no *software* educativo FORMEL. Revista Brasileira de Informática na Educação (RBIE), Porto Alegre, 12(2): 51-55, 2004.

[8] M. S. Biembengut. *Modelagem matemática & implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática*. Edifurb, Blumenau-SC, 2004.

[9] S. Johnston-Wilder, D. Pimm (Ed). *Teaching Secondary Mathematics with ICT.* Open University Press, London, 2004.

[10] M. V. de A. Basso, L. da C. Fagundes. Mídias Digitais, Sistemas de Conceitos e Aprendizagem em Matemática. *Revista Brasileira de Informática na Educação (RBIE)*, Porto Alegre, 13(2): 42-52, 2005.

[11] L. Moysés. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. 8.ed. Papirus, Campinas-SP, 2007.

[12] J. P. Ponte, H. Oliveira, J. M. Varandas. O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional. In D. Fiorentini (ed.). *Formação de professores de Matemática:* Explorando novos caminhos com outros olhares. Mercado de Letras, Campinas-SP, páginas 159-192, 2003.

[13] J. Underwood, C. Hoadley, H. S. Lee, K. F Hollebrands., C. Digiano, K. A. Renninger. IDEA: identifying design principles in educational applets. *Educational Technology Research and Development*, 53(2): 99–112, 2005.

[14] L. O. Brandão, S. Isotani, J. G. Moura. Imergindo a geometria dinâmica em sistemas de educação a distância: iGeom e SAW. *Revista Brasileira de Informática na Educação (RBIE)*, Porto Alegre, 14 (1):41-49, 2006.

[15] H. S. Lee, K. F. Hollebrands. Students' use of technological features while solving a mathematics problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 25 (3): 252–266, 2006.

[16] V. C. P. Santos. Mathlets: Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2008.

[17] G. Iezzi, O. Dolce, D. M. Degenszajn, R. Perigo, N. de Almeida. *Matemática: Ciência e Aplicação*, *1ª Série (Ensino Médio).* Atual, São Paulo-SP, 2004.

[18] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado. *A Matemática do Ensino Médio.* v. 1, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, 2001.

[19] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado. *Temas e Problemas*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, 2001.

[20] A. N. Youssef, E. Soares, V. P. Fernandez. *Matemática de olho no mundo do trabalho* (Ensino Médio). Volume único. Scipione, São Paulo-SP, 2005.

[21] J. A. Comastri, J. C. Tuler. *Topografia – Altimetria*. 3. ed., Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG, 2003.

[22] N. M. L. da Costa. Função seno e cosseno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo-SP, 1997.

[23] L. R. de M. Lindegger. Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo-SP, 2000.

[24] V. L. de O. F. Martins. Atribuindo significado ao seno e cosseno, utilizando o software Cabri-Géomètre. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo-SP, 2003.

[25] H. M. Deitel, P. J. Deitel. *Java, como programar*. Tradução de Carlos Arthur Lang Lisboa. 4. ed., Bookman, Porto Alegre-RS, 2003.

[26] R. Braviano, M. H. W. L. Rodrigues. Geometria Dinâmica: uma nova Geometria. *Revista do Professor de Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo-SP, 49: 22-26, 2002.

[27] L. Amante, L. Morgado. Metodologia de concepção e desenvolvimento de aplicações educativas: o caso dos materiais hipermídias. *Discursos*, Lisboa, Universidade Aberta, III série, Número Especial: 125-138, 2001.

[28] L. S. Vygotsky. *A Formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.* 7. ed., Martins Fontes, São Paulo-SP, 2007.

[29] M. Cole. The zone of proximal development: where culture and cognition create each other. In J. Wertsch (org.). *Culture, Communication and Cognition: Vygotskian Perspective*. New York, Cambridge University Press, 1986.

[30] L. M. Passerino, S. H. da S. Koch, M. C. P. Maciel, M. D. C. C. Martins. Mediação por meio de evidências no contexto lingüístico em ambientes virtuais de aprendizagem. In *Anais XIX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, Fortaleza-CE, páginas 430-440.

[31] M. de C. Borba, M. G. Penteado. Informática e Educação Matemática. 2. ed., Autêntica, Belo Horizonte-MG, 2005.

[32] M. A. Gravina, L. M. A. Santarosa. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. Informática na Educação: teoria & prática, Porto Alegre-RS, 2(1): 43-60, 1999.

[33] Y. Karpov. Development Through the lifespan: a neo-vygotskia approach. In Kozulin, A,, Gindis, B., Ageyev, V. S., & Miller, S. M. (Eds.). *Vygotsky's educational theory in cultural context*. Cambridge University Press, New York, USA. páginas 138-155, 2003.